1. Выберем на евклидовой плоскости начало координат O, и введём на ней структуру векторного пространства: отождествим точку P с вектором OP, а сложение и умножение вектора на вещественное число определим стандартным образом (как в школе). **а)** Опишите, какие движения плоскости (т.е. преобразования, сохраняющие расстояния) являются линейными отображениями. **б)** Введём на плоскости прямоугольную систему координат. Задайте линейные преобразования из прошлого пункта матрицами.

2. Даны матрицы

$$\begin{pmatrix} -11 & 3 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Какие две из них можно перемножить? Найдите все возможные их произведения.

3. Дана квадратная матрица A размера $n \times n$, где $a_{ij} = 1$, если $i \leqslant j$, и 0 иначе. Найдите формулу для A^m и докажите её по индукции.

4. Сформулируйте и докажите теорему о гомоморфизме для векторных пространств.

5. Пусть V – пространство многочленов $\mathbb{R}[x]$. Найдите такой базис этого пространства, чтобы координатами многочлена $f(x)$ были числа $(f(a), f'(a), f''(a), ...)$ для фиксированного $a \in \mathbb{R}$.

6. Пусть V – пространство многочленов степени не выше n $\mathbb{R}[x]_{\leqslant n}$. Найдите такой базис этого пространства, чтобы координатами многочлена $f(x)$ были числа $(f(a_0), f(a_1), f(a_2), ...$ $..., f(a_n))$ для фиксированных различных $a_i \in \mathbb{R}$.

7. **а)** Докажите, что любой линейно независимый набор векторов можно дополнить до базиса, и в любой порождающей системе можно выделить базис (пространства не обязательно конечномерные!). **б)** Пусть $f : V \to U$ – линейное отображение. Докажите, что если V конечномерно, то $\dim V = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f$. **в)** Докажите, что отображение из конечномерного пространства в пространство той же размерности является изоморфизмом тогда и только тогда, когда оно инъективно, и тогда и только тогда, когда оно сюръективно.

8. Пусть V_1, V_2 – подпространства в V. Определим $V_1 + V_2$ как множество векторов, представимых в виде $v_1 + v_2$, где $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$. **а)** Докажите, что это подпространство в V. **б)** В случае конечномерных V_1, V_2 докажите, что $\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$ ("формула включений-исключений"). **в)** Приведите пример того, что для трёх подпространств аналогичная "формула включений-исключений" уже неверна.

9. **а)** Пусть V_1 и V_2 – подпространства в V. Докажите, что $V = V_1 + V_2$ тогда и только тогда, объединение базисов V_1 и V_2 образует порождающую систему V. **б)** Сумма подпространств называется прямой (и обозначается $V_1 \oplus V_2$), если любой вектор из V представляется в виде $v_1 + v_2, v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$ единственным образом. Докажите, $V = V_1 \oplus V_2$ тогда и только тогда, объединение базисов V_1 и V_2 образует базис V. **в)** Докажите аналогичные результаты для сумм произвольного конечного числа подпространств.