1. **а)** Докажите, что для данной СЛУ множества главных и свободных переменных определены однозначно (т.е. вне зависимости от того, какие элементарные преобразования строк делать, в итоге ведущие элементы в строках окажутся на одних и тех же местах). **б)** Докажите, что канонический вид (он же улучшенный ступенчатый) определён однозначно.

2. **а)** Пусть $AX = B$ – система линейных уравнений, причём матрица A квадратная (т.е. уравнений столько же, сколько и неизвестных). Докажите, что решение этой системы существует и единственно (для любого столбца B) тогда и только тогда, когда $AX = 0$ имеет только нулевое решение. **б)** Что можно сказать про количество решений этой системы, если $AX = 0$ имеет ненулевое решение?

3. Придумайте и докажите критерий существования решения у матричного уравнения $AX = B$.

4. Обозначим через $U_{i,j,\alpha}$ квадратную матрицу, у которой на диагонали стоят единицы, на месте i, j стоит α, а остальные элементы – нули; через $U_{i,\alpha}$ обозначим диагональную матрицу, у которой на диагонали стоят единицы, за исключением места i, i, на котором стоит α; через U_{ij} (запятую не ставим, чтобы отличать от матриц прошлого типа) обозначим матрицу, у которой на диагонали стоят единицы, за исключением нулей на местах i, i и j, j, на местах i, j и j, i стоят единицы, а остальные элементы – нули. Докажите, что умножение на эти матрицы слева это в точности элементарные преобразования строк. Чему соответствуют умножения на эти матрицы справа?

5. Докажите, что матрица имеет ранг 1 в тот и только том случае, когда она является произведением столбца (не из этой матрицы, а просто некоторого столбца) на строку (аналогично).

6. Докажите, что **а)** $\operatorname{rk}(A + B) \leqslant \operatorname{rk} A + \operatorname{rk} B$; **б)** $\operatorname{rk}(AB) \leqslant \min\{\operatorname{rk} A, \operatorname{rk} B\}$.

7. Докажите, что любую матрицу ранга r можно представить в виде суммы r матриц ранга 1, но нельзя в виде суммы меньшего числа матриц ранга 1.

8. Пусть A – квадратная матрица размера $n \times n$. **а)** Докажите, что обратная по умножению матрица (т.е. такая матрица A^{-1}, что $AA^{-1} = A^{-1}A = E$, где E – единичная матрица) существует тогда и только тогда, когда $\operatorname{rk} A = n$. **б)** Докажите, что если $A^{-1}A = E$, то и $AA^{-1} = E$ (и наоборот).

9. Обоснуйте следующий алгоритм нахождения обратной матрицы. Рассмотрим матрицу $(A|E)$ размера $n \times 2n$, составленную из матриц A и E. Элементарными преобразованиями строк приведём левую часть к единичному виду, если это возможно. Тогда в правой части будет в точности A^{-1}. Если привести левую часть к единичному виду невозможно, то матрица необратима.