Семинар №8

Модули над кольцами. Абелевы группы. Строение мультипликативных групп колец вычетов.

26.10.2026

Все кольца считаются ассоциативными, коммутативными и с единицей.

1. Приведите пример кольца R и двух идеалов $I, J \in R$, для которых R/I и R/J изоморфны как кольца, но не изоморфны как R-модули.

2. Для A-модуля M аннулятор $\mathrm{Ann}(M)$ это множество $\{a \in A | a \cdot m = 0 \forall m \in M\}$. Для подмодулей $K, L \subset M$ обозначим $(K : L) = \{a \in A | a \cdot L \subset K\}$. **а)** Докажите, что $\mathrm{Ann}(M)$ и $(K : L)$ – идеалы. **б)** Вычислите $(K : L)$ для идеалов (k) и (l) в $\mathbb{Z}$. **в)** Проверьте, что $\mathrm{Ann}(K + L) = \mathrm{Ann}(K) \cap \mathrm{Ann}(L)$, **г)** $\mathrm{Ann}((K + L)/L) = (L : K)$.

3. Пусть A – кольцо, $I, J \subset A$ – идеалы, а M – A-модуль. Докажите, что **а)** $\mathrm{Hom}_A(A/I, A/I) \simeq A/I$, **б)** $\mathrm{Hom}_A(A/I, A/J) \simeq A/J$, если $I \subset J$, **в)** $\mathrm{Hom}_A(A/I, M) \simeq \{m \in M | I \cdot m = 0\}$. Все изоморфизмы – изоморфизмы A-модулей!

4. Пусть N и M_i – A-модули. Докажите, что $\mathrm{Hom}_A(N, \prod M_i) \simeq \prod \mathrm{Hom}_A(N, M_i)$ и $\mathrm{Hom}_A(\oplus M_i, N) \simeq \prod \mathrm{Hom}_A(M_i, N)$. Можно ли заменить $\oplus$ на $\prod$ или наоборот?

5. Найдите согласованные базисы и вычислите факторгруппу A/B, если A – свободная абелева группа с базисом x_1, x_2, x_3, а B порождена

$y_1 = 42x_1 + 30x_2 + 24x_3$,
$y_2 = 22x_1 + 18x_2 + 14x_3$,
$y_3 = 20x_1 + 18x_2 + 16x_3$.

6. **а)** Докажите, что конечная абелева группа G является циклической в том и только том случае, когда для любого простого делителя $|G|$ количество элементов порядка p в этой группе равно $p-1$. **б)** Пусть F – поле, а $G \subset F^*$ – конечная подгруппа его мультипликативной группы. Докажите, что G циклическая.

Через $U(\mathbb{Z}_n)$ будем обозначать мультипликативную группу обратимых остатков по модулю n. Пусть $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} ... p_k^{a_k}$. Из китайской теоремы об остатках моментально следует, что $U(\mathbb{Z}_n) \simeq U(\mathbb{Z}_{p_1^{a_1}}) \times U(\mathbb{Z}_{p_2^{a_2}}) \times ... \times U(\mathbb{Z}_{p_k^{a_k}})$. Так что будем описывать группы вида $U(\mathbb{Z}_{p^a})$.

7. Рассмотрим в группе $U(\mathbb{Z}_{2^n})$ отображение возведения в квадрат. **а)** Найдите его ядро. **б)** Докажите, что -1 не лежит в образе при $n > 1$. **в)** Пользуясь этим, докажите, что при $n > 1$ $U(\mathbb{Z}_{2^n}) \simeq \mathbb{Z}/2^{n-2}\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (указание: примените отображение возведения в квадрат несколько раз).

8. Докажите, что имеется сюръективный гомоморфизм $U(\mathbb{Z}_{p^n}) \to U(\mathbb{Z}_p)$. С помощью него покажите, что $\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$ выделяется в $U(\mathbb{Z}_{p^n})$ прямым слагаемым.

9. Рассмотрим гомоморфизм $U(\mathbb{Z}_{p^n}) \to U(\mathbb{Z}_{p^n})$ возведения в p-ую степень. Докажите, что в его ядре ровно p элементов. Пользуясь этим и предыдущей задачей, докажите, что группа $U(\mathbb{Z}_{p^n})$ циклическая.