Семинар №9 Теоремы Силова, коммутант и разрешимые группы. 02.11.2026

1. **а)** Опишите силовские подгруппы в S_6 и найдите их количество. **б)** Найдите (хотя бы одну) силовскую p-подгруппу в S_{p^2}.

2. Пользуясь теоремами Силова, опишите все группы порядка **а)** 15, **б)** 21.

3. Докажите, что группа порядка pq^2, где p и q – различные простые числа, не проста (указание: примените теоремы Силова и в единственном нетривиальном случае поняв, как пересекаются силовские подгруппы, оцените количество элементов).

4. Докажите, что группа порядка pqr, где p, q и r – различные простые числа, не проста.

5. **а)** Пусть порядок группы G равен pq^3, где p и q — простые числа, причём в ней нет нормальных подгрупп порядка p и q^3. Докажите, что $p = 3, q = 2$. **б)** Докажите, что действие этой группы сопряжениями на силовских 3-подгруппах дважды транзитивно (т.е. любую упорядоченную пару элементов можно перевести в любую упорядоченную пару). **в)** Выведите отсюда, что образ соответствующего отображения $G \to S_4$ равен A_4 или S_4. **г)** Докажите, что он не может быть равен A_4, и, следовательно, $G \simeq S_4$. **д)** Докажите, что группа порядка pq^3 не проста.

6. Вычислите последовательность n-ых коммутантов $G \supset G' \supset G'' \supset ...$ для группы **а)** S_4, **б)** S_5.

7. **а)** Докажите, что коммутант произведения двух групп это произведение их коммутантов. **б)** Докажите, что любая подгруппа группы G, содержащая коммутант G', нормальна.

8. Докажите, что группа порядка **а)** pq^2, pq^3, pqr (можно пользоваться задачами выше), **б)** $2p^k$, **в)** $3p^k$, **г)** $4p^k$, где p, q, r — простые числа, разрешима.

С учётом того, что группы порядка p^k и pq разрешимы, нетрудно вычислить, что наименьший порядок, который нами ещё не рассмотрен, это 60. Очевидно, неразрешимая группа порядка 60 Должна быть простой.

9. Пусть G – простая группа порядка 60. **а)** Докажите, что собственные подгруппы этой группы имеют индекс $\geqslant 5$, причём если есть подгруппа индекса 5, то $G \simeq A_5$. **б)** Пусть индексы всех подгрупп в G больше 5. Вычислите количество силовских подгрупп в G. **в)** Рассмотрев нормализатор $N(P \cap Q)$, где P и Q – силовские 2-подгруппы, покажите, что $P \cap Q = \{e\}$. **г)** Оценив количество элементов, покажите, что этот случай невозможен. Таким образом, единственная простая (и единственная неразрешимая) группа порядка 60 – это A_5. Её простоту (и вообще простоту групп $A_n, n \geqslant 5$ мы докажем на следующей лекции.