Листок 5
ГЕОМЕТРИЯ
Сферическая геометрия

Чтобы сдать этот листок, необходимо решить не меньше 7 задач. Если в задаче есть пункты, то она засчитывается, если сданы все пункты. Задача со звёздочкой приравнивается к двум задачам без звёздочки. Во всех задачах этого листка a, b, c — стороны, α, β, γ — противолежащие им углы сферического треугольника. Радиус сферы S^2 равен 1.

1. Докажите неравенство треугольника на сфере.

2. Докажите теорему синусов на сфере $\dfrac{\sin a}{\sin \alpha} = \dfrac{\sin b}{\sin \beta} = \dfrac{\sin c}{\sin \gamma}$.

3. (а) Докажите первую теорему косинусов для сферы S^2:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha.$$

   (б) Докажите вторую теорему косинусов для сферы S^2:

$$\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a.$$

4. Докажите, что

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin b \sin c}}, \qquad \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin p \sin(p-a)}{\sin b \sin c}},$$

   где $p = (a+b+c)/2$.

5. (а) Докажите, что $a + b + c < 2\pi$.

   (б) Найдите точную нижнюю и точную верхнюю грань суммы углов равностороннего треугольника на сфере.

6.* Найдите площадь сферического круга радиуса r (т.е. области, которая ограничена сферической окружностью радиуса r).

7. (а) Докажите, что сферическая окружность является также и евклидовой окружностью. Равны ли радиусы этих окружностей, т.е. совпадает ли сферический радиус сферической окружности с евклидовым радиусом евклидовой окружности?

   (б) Докажите, что любой сферический треугольник имеет описанную и вписанную окружности.

8.* Докажите, что радиус r вписанной окружности и радиус R описанной окружности сферического треугольника удовлетворяют

$$\operatorname{tg} r = \sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p}}, \qquad \operatorname{ctg} R = \sqrt{\frac{\sin(\alpha-s)\sin(\beta-s)\sin(\gamma-s)}{\sin s}},$$

   где $s = (a+b+c-\pi)/2$.

9. (а) Докажите, что медианы сферического треугольника пересекаются в одной точке.

   (б) Докажите, что высоты сферического треугольника всегда пересекаются в одной точке.

   (в) Верна ли в сферической геометрии теорема Пифагора в виде «сумма квадратов катетов прямоугольного треугольника равна квадрату гипотенузы»?

10. Пусть медианы и высоты сферического треугольника пересекаются в точках M и H соответственно. Может ли оказаться, что $M = H$?

11. (а) Рассмотрим отрезок сферической прямой длины α. Рассмотрим полюсы всех сферических прямых, пересекающих данный отрезок. Докажите, что рассматриваемые точки заметают множество площади 4α.

    (б) Дано несколько отрезков сферических прямых, сумма длин которых меньше π. Докажите, что существует сферическая прямая, не пересекающая ни одного из данных отрезков.

12. Найдите фундаментальные области для действия групп изометрий тетраэдра, куба, додекаэдра и икосаэдра на двумерной сфере и определите количество образов (с попарно непересекающимися внутренностями) фундаментальной области при соответствующем действии.

13.* Ясно, что любые два равносоставленых многоугольника на сфере имеют равные площади. Докажите обратное: что любые два многоугольника на сфере с равными площадями равносоставлены.