Листок 7
ГЕОМЕТРИЯ
Гиперболическая геометрия: модель на верхней полуплоскости, модель Кэли—Клейна

Чтобы сдать этот листок, необходимо решить хотя бы 10 задач. Если в задаче есть несколько пунктов, то для того, чтобы её сдать, нужно решить все пункты.

1. Докажите следующее:
   а) дробно-линейные преобразования сохраняют двойное отношение четверки точек на римановой сфере $\mathbb{C}$;
   б) дробно-линейное преобразование однозначно определяется образами трех точек.

2. Пусть l — прямая на евклидовой плоскости, γ — окружность с центром O на l, P — точка, не лежащая ни на l, ни на перпендикуляре к l из O. Докажите, что существует единственная окружность с центром на l, проходящая через P и ортогональная к γ.

3. Пусть l — прямая на евклидовой плоскости, γ — окружность с диаметром AB, лежащим на l, P — точка, не лежащая ни на l, ни на γ, ни на перпендикулярах к l из A и B. Докажите, что существуют единственная окружность с центром на l, проходящая через P и A, и единственная окружность с центром на l, проходящая через P и B.

4. Докажите, что все изометрии, сохраняющие ориентацию, модели Пуанкаре на круге имеют вид

$$z \mapsto \frac{az+b}{\overline{b}z+\overline{a}},$$

   где a и b — комплексные числа, для которых $|a|^2 - |b|^2 = 1$.

5. Покажите, что для любых двух флагов найдется изометрия модели на полуплоскости, которая отображает первый флаг во второй (флаг — это тройка, состоящая из прямой l на гиперболической плоскости, одной из полуплоскостей с границей l и точки на прямой l).

6.* а) Вычислите площадь треугольника с вершинами в точках 1, -1, ∞.

   б) Найдите формулу для площади треугольника в гиперболической геометрии.

7. Докажите неравенство треугольника для модели Пуанкаре в верхней полуплоскости.

8.* Докажите, что группа сохраняющих ориентацию изометрий расстояния модели на верхней полуплоскости совпадает с группой $PSL_2(\mathbb{RR})$.

9. а) Докажите, что в модели Кэли—Клейна для трех точек A, B, C, лежащих на одной прямой так, что B находится между A и C, выполнено равенство $d(A,B) + d(B,C) = d(A,C)$.

   б) Докажите, что из равенства $d(A,B) + d(B,C) = d(A,C)$ вытекает, что точки A, B, C лежат на одной прямой и B лежит между A и C.

10. Докажите, что отражение в прямой в модели Кэли—Клейна является инволюцией.

11. Покажите, что понятие перпендикулярных прямых в модели Кэли—Клейна корректно определено (т.е. не зависит от порядка, в котором указаны две прямые).

12.* Докажите, что сумма углов треугольника в модели Кэли—Клейна меньше π, исходя непосредственно из определений, относящихся к модели.

13. В модели Кэли—Клейна постройте треугольник с суммой углов, меньшей чем заданное положительное ε.

14. Докажите, что стереографическая проекция конформна (т.е. сохраняет угловую меру).

15. а) Докажите гиперболическую теорему синусов.
    б) Докажите гиперболическую теорему косинусов.

16. а) Докажите, что в гиперболической геометрии конгруэнтны любые два треугольника, стороны которых соответственно равны.

    б) Докажите, что в гиперболической геометрии конгруэнтны любые два треугольника, у которых равен угол и соответственно равны его стороны.

17. Покажите, что в гиперболической геометрии гомотетия не конформна.

18. Докажите, что в треугольнике с прямым углом γ стороны a, b, c и противоположные им углы α, β, $\gamma = \pi/2$ удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\operatorname{sh} a = \operatorname{sh} c \sin\alpha; \qquad \operatorname{th} b = \operatorname{th} c \cos\alpha; \qquad \operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta = \operatorname{ch} c; \qquad \cos\alpha = \operatorname{ch} a \sin\beta.$$

    Что можно сказать про эти соотношения (кроме того, что они верны) для очень малых a, b и c?

19. Докажите, что три

    а) биссектрисы,

    б) медианы,

    в) высоты

    гиперболического треугольника пересекаются в одной точке.

20. Гиперболическая теорема Менелая.

    Пусть прямая l пересекает прямые BC, CA, AB (содержащие стороны треугольника ABC) в точках A_1, B_1, C_1 соответственно; тогда

$$\frac{\operatorname{sh}|AC_1|}{\operatorname{sh}|C_1B|} \cdot \frac{\operatorname{sh}|BA_1|}{\operatorname{sh}|A_1C|} \cdot \frac{\operatorname{sh}|CB_1|}{\operatorname{sh}|B_1A|} = 1.$$

21. Докажите, что для прямоугольного пятиугольника верны следующие соотношения:

$$\operatorname{ch} c = \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b; \qquad \operatorname{ch} c = \operatorname{cth}\alpha \operatorname{cth}\beta.$$

22. Докажите, что для прямоугольного шестиугольника верны следующие соотношения:

$$\operatorname{ch} c = \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b \operatorname{ch}\gamma - \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b;$$

$$\operatorname{sh} a \operatorname{sh} b \operatorname{sh}\beta = \operatorname{sh} c;$$

$$\operatorname{cth}\alpha \operatorname{sh}\gamma = \operatorname{ch}\gamma \operatorname{ch} b - \operatorname{cth} a \operatorname{sh} b.$$