Листок 8
ГЕОМЕТРИЯ
Проективная геометрия

Чтобы сдать этот листок, необходимо решить хотя бы 10 задач. Если в задаче есть несколько пунктов, то для того, чтобы её сдать, нужно решить все пункты.

1. Докажите, что двойное отношение четырех коллинеарных точек инвариантно при проективных преобразованиях.
2. Пусть двойное отношение $\langle A_1, A_2, A_3, A_4\rangle$ четырех коллинеарных точек равно λ. Найдите все значения двойного отношения при всевозможных перестановках этих точек в двойном отношении.
3. Четыре плоскости проходят через общую прямую l, а прямая m пересекает все четыре плоскости. Докажите, что двойное отношение точек пересечения прямой m с этими плоскостями не зависит от выбора m.
4. Вычислите двойное отношение четырех точек $(x_i : y_i : 0)$, $i = 1, 2, 3, 4$, лежащих на бесконечно удаленной прямой.
5. a) Сформулируйте и докажите теорему, двойственную к теореме Паппа. Сделайте соответствующий чертеж.

   b) Сформулируйте и докажите теорему, двойственную к теореме Дезарга. Сделайте соответствующий чертеж.
6. * Докажите, что проективная двойственность переводит любую точку коники в прямую, касательную к двойственной конике.
7. Используя предыдущую задачу, сформулируйте и докажите теорему, двойственную к теореме Паскаля (она известна как теорема Брианшона). Сделайте соответствующий чертеж. Задачу можно сдавать вне зависимости от того, сдали ли Вы предыдущую задачу.
8. В пространстве $\mathbb{R}^3$ даны три скрещивающиеся прямые l, l_1, l_2. Каждой точке $A_1 \in l_1$ поставим в соответствие точку A_2, в которой прямая l_2 пересекает плоскость, содержащую A_1 и l. Докажите, что соответствие $A_1 \mapsto A_2$ является проективным отображением прямой l_1 на l_2.
9. На плоскости дан многоугольник $A_1 \dots A_n$. При движении точек $A_1, \dots, A_{n-1}$ вдоль некоторых прямых $l_1, \dots, l_{n-1}$ соответственно оказалось, что прямые, содержащие стороны многоугольника, проходят через неподвижные точки $O_1, \dots, O_n$, лежащие на одной прямой. Докажите, что точка A_n при этом также движется вдоль некоторой прямой.
10. Запишите уравнение гиперболы $x^2 - y^2 = 1$, параболы $y = x^2$ и окружности $x^2 + y^2 = 1$ в однородных координатах и найдите все их точки на бесконечности.
11. Запишите уравнение кривой $y^2 = x^3 - x$ в однородных координатах. Найдите все ее точки на бесконечности и нарисуйте эту кривую в окрестности каждой ее бесконечно удаленной точки.
12. Запишите уравнение кривой $y^2 = x^3 + x^2$ в однородных координатах. Найдите все ее точки на бесконечности и нарисуйте эту кривую в окрестности каждой ее бесконечно удаленной точки.
13. Докажите евклидов вариант теоремы Паскаля для случая окружности.
14. Даны пять различных коллинеарных точек A, B, C, D, E. Докажите, что

$$\langle A, B, C, D\rangle \cdot \langle A, B, D, E\rangle \cdot \langle A, B, E, C\rangle = 1.$$

15. Укажите какое-нибудь проективное преобразование, переводящее окружность $x^2 + y^2 = 1$ в параболу $y = x^2$. Единственно ли оно?
16. Опишите группу, действующую на грассманиане как некоторую группу классов эквивалентности матриц. Эта группа должна превращаться в группу, действующую на $\mathbb{RP}^n$, в случае, когда грассманиан совпадает с проективным пространством.
17. * Введите аналог однородных координат на грассманиане. Эти координаты должны совпадать с однородными координатами на $\mathbb{RP}^n$ в случае, когда грассманиан совпадает с проективным пространством.