Корасслоения и гомотопические группы

▷ *Цилиндр* отображения $f : X \to Y$ — это пространство $Cyl(f) := (X \times I \sqcup Y)/\sim$, $(x, 1) \sim f(x)$.
Конус отображения $f : X \to Y$ — это пространство $C(f) := Cyl(f)/X$. (Он не стягиваем.)

Задача 6.1. а) Докажите: $X \to Cyl(f)$ — корасслоение, $Cyl(f) \to Y$ — гом. эквивалентность.
б) Пусть $f \sim g : X \to Y$. Докажите, что $C(f) \simeq C(g)$.
в) Пусть (X, A) — корасслоение, $f \sim g : A \to B$. Докажите, что $X \cup_f B \simeq X \cup_g B$.

Задача 6.2. Пусть (X, A) — корасслоение, $X \simeq *$. Докажите, что $(X, A) \simeq (CA, A)$.

Задача 6.3. Пусть (X, x_0), (Y, y_0) — корасслоения, Y линейно связно.
а) Докажите, что $\langle X, Y\rangle \to [X, Y]$ сюръективно.
б) Постройте (гомоморфизм моноидов $\pi_1(Y) \to (\langle Y, Y\rangle, \circ)$ и) действие $\langle X, Y\rangle \curvearrowleft \pi_1(Y)$.
в) Докажите, что $[X, Y] \cong \langle X, Y\rangle/\pi_1(Y)$.
г) Выразите $[S^1, Y]$ через фундаментальную группу.

Задача 6.4. Пусть X клеточное, $T := \bigcup_{n\geq 0}[n, n+1] \times \mathrm{sk}_n(X) \subseteq [0, \infty) \times X$. Докажите, что $T \simeq X$.

▷ Назовём последовательность отображений пунктированных пространств $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} \Sigma X$ *гомотопическим корасслоением*, если "она гомотопически эквивалентна настоящему корасслоению": найдётся <u>гомотопически</u> коммутативная диаграмма
$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h} & \Sigma X, \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi} & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Sigma\varphi} \\ X' & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & Y' \cup CX' & \longrightarrow & \Sigma X' \end{array}$$
где нижняя строка — настоящее корасслоение, а вертикальные стрелки — гомотопические эквивалентности.

Задача 6.5 (единственность последовательности Пуппе для корасслоения).
а) Докажите, что любое $f \in \langle X, Y\rangle$ достраивается до гомотопического корасслоения, причём
б*) однозначно с точностью до гомотопической эквивалентности (в описанном смысле).

▷ В частности, у элемента $f \in \langle X, Y\rangle$ есть *гомотопический кослой* $\mathrm{hocofib}(f) := Z$, а набор данных $(Z \in hTop_*, g \in \langle Y, Z\rangle, h \in \langle Z, \Sigma X\rangle)$ определён однозначно с точностью до (неединственного) изоморфизма.

Задача 6.6. Докажите: ΩY — а) гомотопически ассоциативное б) группообразное в) H-пространство.
Докажите: ΣX — г) гомотопически коассоциативное д) когруппообразное е) ко-H-пространство.

Задача 6.7. Докажите, что $\langle \Sigma X, Y\rangle \cong \langle X, \Omega Y\rangle$.

Задача 6.8. Докажите, что $\pi_n(X, A)$ — а) группа при $n \geq 2$; б) абелева группа при $n \geq 3$.
в) Покажите, что $\pi_2(X, A)$ может быть неабелевой.

Задача 6.9 (аргумент Экмана–Хилтона, 1962).
а) Дано множество S, элементы $1_\bigcirc, 1_\otimes \in S$ и операции $\circ, \otimes : S \times S \to S$ со свойствами:

$$1_\bigcirc \circ a = a \circ 1_\bigcirc = 1_\otimes \otimes a = a \otimes 1_\otimes = a, \quad (a \otimes b) \bigcirc (c \otimes d) = (a \circ c) \otimes (b \circ d).$$

Докажите, что $1_\bigcirc = 1_\otimes$, $\circ = \otimes$, и эта операция коммутативна и ассоциативна.
б) Пусть Y — H-пространство. Докажите, что $\langle X, \Omega Y\rangle$ — абелева группа.
в) Пусть X — ко-H-пространство, Y — H-пространство. Докажите, что $\langle X, Y\rangle$ — абелев моноид.

Задача 6.10. а) Пусть $x_0 \in X$. Постройте действие $\pi_1(X, x_0) \curvearrowright \pi_n(X, x_0)$ автоморфизмами.
б) Опишите действие $\pi_1(X, x_0) \curvearrowright \pi_1(X, x_0)$.
в) Пусть $x_0 \in A \subset X$. Постройте действие $\pi_1(A, x_0)$ на $\pi_n(X, x_0)$ и $\pi_n(X, A, x_0)$ автоморфизмами.
г) Докажите, что при $n \geq 2$ точная последовательность пары согласована с действием $\pi_1(A, x_0)$.