Клеточная аппроксимация

Задача 7.1. Пусть $E \to B$ — накрытие, $n > 1$. Докажите, что $p_* : \pi_n(E, e) \to \pi_n(B, p(e))$ биективно.

Задача 7.2 (Заклеивание гомотопических групп). Дано пространство X и число $n \geq 0$. Постройте пространство Y и отображение $X \to Y$ так, что $\pi_{\leq n}(X) \cong \pi_{\leq n}(Y)$, $\pi_{>n}(Y) = 0$.

Задача 7.3. Пусть X — k-связный CW-комплекс, Y — ℓ-связный CW-комплекс ($k, \ell \geq 0$). Докажите, что $\pi_n(X \vee Y) \cong \pi_n(X) \times \pi_n(Y)$ при $n \leq k + \ell$. (Подсказка: сравните с $\pi_n(X \times Y)$.)

Задача 7.4 (Фундаментальный скрещенный модуль (Уайтхед'41)). Пусть (X, A, x_0) — пара. Рассмотрим действие $\pi_1(A) \curvearrowright \pi_2(X, A)$, $(\gamma, x) \mapsto \gamma.x$ и гомоморфизм $\partial : \pi_2(X, A, x_0) \to \pi_1(A, x_0)$.
а) Докажите, что $\partial(\gamma.x) = \gamma\partial(x)\gamma^{-1}$. б) Докажите, что $\partial(x).y = xyx^{-1}$.
в) Пусть $A = \mathrm{sk}_1(X)$. Восстановите $\pi_1(X) \curvearrowright \pi_2(X)$, зная $(\pi_1(A) \curvearrowright \pi_2(X, A), \partial)$.
г*) Докажите, что любые такие $(G \curvearrowright H, \partial : H \to G)$ реализуются как $(\pi_1(A) \curvearrowright \pi_2(X, A), \partial)$.

Задача 7.5* (Сложная часть аддиционной теоремы). Пусть $i : X \to Y = X \cup \bigcup_\alpha e^{n+1}_\alpha$ — приклеивание клеток по отображениям $\chi_\alpha : (S^n, *) \to (X, x_0)$. Докажите, что $\mathrm{Ker}(i_*) \lhd \pi_n(X)$ — наименьшая подгруппа, содержащая классы $[\chi_\alpha]$ и замкнутая относительно действия $\pi_1(X)$.

▷ С этого места можно пользоваться теоремой Уайтхеда и сложной частью аддиционной теоремы.

Задача 7.6. Пусть X клеточное, $\mathrm{sk}_0(X) = *$. Задайте $\pi_1(X)$ образующими и соотношениями.

Задача 7.7 (Пространства Эйленберга–Маклейна).
а) Для произвольной группы π постройте клеточное пространство типа $K(\pi, 1)$.
б) Для абелевой группы π и $n \geq 2$ постройте клеточное $K(\pi, n)$.
в) Докажите, что любые два пространства типа $K(\pi, n)$ слабо гомотопически эквивалентны.

Задача 7.8. Для пары (X, A) а) постройте "относительную CW-аппроксимацию" $f : (Y, B) \to (X, A)$ — отображение из CW-пары, которое индуцирует изоморфизмы на всех гомотопических группах. б) Докажите, что её можно сделать естественной.

Задача 7.9. Проверьте, что CW-аппроксимация $q_X : QX \to X$, построенная на лекции, естественна[1]: непрерывное отображение $f : X \to Y$ продолжается до клеточного отображения $Qf : QX \to QY$, и $Q(f \circ g) = Qf \circ Qg$, $Q(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$, $f \circ q_X = q_Y \circ Qf$.

▷ Пусть $hTop^{CW}$ — категория, в которой объекты — CW-комплексы, морфизмы — $[X, Y]$. В следующей задаче Q — это функтор $Top \to hTop^{CW}$.

Задача 7.10* ($hTop^{CW}$ — локализация Top по слабым эквивалентностям). Пусть функтор $G : Top \to \mathcal{C}$ переводит слабые гомотопические эквивалентности в изоморфизмы. Докажите:
а) Если $f, g : X \to Y$ гомотопны, то $G(f) = G(g)$. (Сведите к случаю $i_0 \sim i_1 : X \to X \times [0, 1]$.)
б) Существует функтор $\widehat{G} : hTop^{CW} \to \mathcal{C}$ и изоморфизм функторов[2] $G \cong \widehat{G} \circ Q : Top \to \mathcal{C}$.
в) Любые два таких функтора $\widehat{G}$, $\widehat{G}'$ изоморфны.

---

[1] То есть, $Q : Top \to Top^{CW}$ — функтор, $q : incl \circ Q \Rightarrow Id_{Top}$ — естественное преобразование.

[2] То есть, в категории $\mathcal{C}$ найдутся изоморфизмы $\alpha_X : G(X) \xrightarrow{\simeq} \widehat{G}(QX)$ такие, что для любого непрерывного отображения $f : X \to Y$ диаграмма
$$\begin{array}{ccc} G(X) & \xrightarrow{\alpha_X} & \widehat{G}(QX) \\ \downarrow{\scriptstyle G(f)} & & \downarrow{\scriptstyle \widehat{G}(Qf)} \\ G(Y) & \xrightarrow{\alpha_Y} & \widehat{G}(QY) \end{array}$$
коммутативна.