Расслоения и гомотопические группы

Задача 8.1. Проверьте, что $\pi_1(A,x_0)\to\pi_1(X,x_0)\to\pi_1(X,A,x_0)\to\pi_0(A,x_0)\to\pi_0(X,x_0)$ — точная последовательность множеств с отмеченной точкой.

Задача 8.2. а) Докажите, что $S^1\to S^{2n+1}\to\mathbb{C}P^n$ — локально тривиальное расслоение ($0\le n\le\infty$).
б) Докажите, что оно не тривиальное. в) Вычислите гомотопические группы $\mathbb{C}P^\infty$.
г) Докажите, что у S^3 и $S^2\times\mathbb{C}P^\infty$ одинаковые гомотопические группы и разные гомологии.

Задача 8.3. Пусть $f:X\to Y$ — отображение, $p:E\to Y$ — расслоение. Рассмотрим *обратный образ* $f^*E:=\{(x,e)\in X\times E\mid f(x)=p(e)\}$, то есть пулбэк ("декартов квадрат")

$$\begin{array}{ccc} f^*E & \xrightarrow{f'} & E \\ \downarrow{\scriptstyle p'} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ X & \xrightarrow{f} & Y. \end{array}$$

а) б) в) Докажите, что p' — расслоение с тем же слоем.
г*) Пусть p — расслоение Гуревича, f — корасслоение. Докажите, что f' — корасслоение.
д) Сформулируйте утверждение, двойственное к г), и докажите, что оно неверно.

Задача 8.4. а) Пусть $p:E\to B$ — расслоение Гуревича, B линейно связно. Докажите, что его слои гомотопически эквивалентны. б) Постройте какое-нибудь не-расслоение с тем же свойством.
в) Докажите, что слои расслоения Серра (с лин. связной базой) слабо гомотопически эквивалентны.

Задача 8.5. а) Пусть $F\to E\to B$ — расслоение Серра. Постройте действие $\pi_1(B)\curvearrowright H_*(F)$.
б) Пусть для некоторого $n\ge 1$ действие $\pi_1(F)\curvearrowright\pi_n(F)$ тривиально. Постройте $\pi_1(B)\curvearrowright\pi_n(F)$.
в) Пусть теперь $F\to E\to B$ — расслоение Гуревича. Постройте гомоморфизм $\pi_1(B)\to[F,F]$, согласованный с конструкцией выше. г) Докажите, что $b\mapsto F_b$ задаёт функтор $\Pi_1(B)\to hTop$.

Задача 8.6 (Замена отображения на расслоение). Пусть $f:X\to Y$. Рассмотрим

$$X\xrightarrow{h}\widetilde{X}:=\{(x,\gamma)\in X\times Y^{[0,1]}\mid f(x)=\gamma(0)\}\xrightarrow{p}Y,\quad h(x):=(x,\mathrm{const}_{f(x)}),\ p(x,\gamma):=\gamma(1).$$

Докажите: а) p — расслоение Гуревича; б) h — гомотопическая эквивалентность.
в) Объясните, почему эта конструкция двойственна к $X\hookrightarrow Cyl(f)\xrightarrow{\sim}Y$.

Задача 8.7* (Аксиома факторизации). Любое $f:X\to Y$ раскладывается в композицию
а) $X\hookrightarrow Y'\xrightarrow{\sim}\!\!\!\!\rightarrow Y$ корасслоения и расслоения Серра, которое является слабой ГЭ.
б) $X\xhookrightarrow{\sim}X'\twoheadrightarrow Y$ корасслоения, которое является слабой ГЭ, и расслоения Серра.

▷ (Эта задача решается через *аргумент малых объектов*; см. Dwyer–Spalinski, Lemma 8.12.)

Задача 8.8 (Ганя (Ganea)'65). Докажите, что гомотопический слой вложения $X\vee Y\to X\times Y$ гомотопически эквивалентен а) $(PX\times\Omega Y)\cup(\Omega X\times PY)$; б) $(C\Omega X\times\Omega Y)\cup(\Omega X\times C\Omega Y)$; в) $\Omega X*\Omega Y$.

Задача 8.9. Пусть $F\xrightarrow{i}E\xrightarrow{p}B$ — расслоение Серра. Пусть отображение $\sigma:\Omega B\to\Omega E$ таково, что композиция $\Omega B\xrightarrow{\sigma}\Omega E\xrightarrow{\Omega p}\Omega B$ гомотопна тождественному. Докажите, что а) композиция

$$\Omega F\times\Omega B\xrightarrow{\Omega i\times\sigma}\Omega E\times\Omega E\xrightarrow{\mu}\Omega E$$

— слабая гомотопическая эквивалентность; б) $\pi_*(X\vee Y)\simeq\pi_*(X)\oplus\pi_*(Y)\oplus\pi_*(\Omega X*\Omega Y)$.

Задача 8.10* (Фельдбау'39). а) Пусть $E\to X\times[-1,1]$ — локально тривиальное расслоение, причём его ограничения на $X\times[0,1]$ и $X\times[-1,0]$ тривиальны. Докажите, что само расслоение тривиально. б) Любое локально тривиальное расслоение над $[0,1]^n$ тривиально.