Симплициальное

Этот листок не сдаётся (we shall never surrender). Докажите:

Задача ∞.1. а) $|-|: sSet \rightleftarrows Top : \mathrm{Sing}$ — сопряжённые функторы.
б) Если $X_\bullet$ — симплициальное множество, то $|X_\bullet|$ — CW-комплекс.
в) $\mathrm{Cells}_n(|X_\bullet|) = X_n^{nondeg} := X_n \setminus \bigcup_j s_j(X_{n-1})$ — множество *невырожденных* n-симплексов.

Задача ∞.2. а) Если $Y_\bullet \subset X_\bullet$, то $(X/Y)_n := X_n/Y_n$ — симп. множество, и $|X_\bullet|/|Y_\bullet| \cong |(X/Y)_\bullet|$.
б) $|(X \times Y)_\bullet| \cong |X_\bullet| \times_{cg} |Y_\bullet|$ (произведение с CW-топологией).

▷ *Полусимплициальный* объект $A_\bullet$ в категории $\mathcal{C}$ — это функтор $\Delta_{inj}^o \to \mathcal{C}$. Эквивалентно, это набор объектов $\{A_n \in \mathcal{C} : n \geq 0\}$ и морфизмов $\{d_j : A_n \to A_{n-1},\ 0 \leq j \leq n\}$ таких, что $d_i d_j = d_{j-1} d_i$, $i < j$.

Задача ∞.3. а) Для полусимплициального множества $A_\bullet$ определено симплициальное множество $E_\bullet(A)$ ("свободное добавление вырождений"), где $E_n(A) := \bigsqcup_k A_k \times \{\text{монотонные } [n] \twoheadrightarrow [k]\}$.
б) $E_\bullet(A)^{nondeg} \cong A_\bullet$. в) $|E_\bullet(A)| \cong |A_\bullet|$, где $|A_\bullet| := (\bigsqcup_{k\geq 0} A_k \times \Delta^k)/\sim$.
г) $E : ssSet \rightleftarrows sSet : \mathrm{Forg}$ — сопряжённые функторы (где Forg — стандартное вложение).

▷ Для симплициальной абелевой группы $A_\bullet$ рассмотрим следующие цепные комплексы:
1. комплекс цепей $C_*(A)$: $C_n(A) := A_n$, $d = \sum_i (-1)^i d_i : A_n \to A_{n-1}$.
2. комплекс вырожденных цепей $D_*(A) \subset C_*(A)$, $D_n(A) := \sum_j s_j(A_{n-1}) \subseteq A_n$.
3. комплекс *нормализованных* цепей $C_*^N(A) := C_*(A)/D_*(A)$.
4. комплекс Мура $C_*^M(A)$: $C_n^M(A) := \bigcap_{i=1}^n \mathrm{Ker}(d_i)$, $d = d_0|_{M_\bullet(A)}$.

Задача ∞.4. а) $C_*^M(A), D_*(A)$ — цепные подкомплексы в $C_*(A)$.
б) Композиция $C_*^M(A) \to C_*(A) \to C_*^N(A)$ — изоморфизм.
в) Если $X_\bullet \in sSet$, то $C_*^N(\mathbb{Z}X_\bullet) \cong C_*^{CW}(|X_\bullet|)$.

Задача ∞.5*. При $k \geq 0$ обозначим $t_k(x) := \begin{cases} (-1)^k s_k(x), & x \in A_{\geq k} \\ 0, & x \in A_{<k}, \end{cases}$ $h_k(x) := x - d(t_k(x)) - t_k(dx)$.
а) $D_*(A)^{(k)} := \bigoplus_n \bigcup_{j<k} s_j(A_{n-1})$ — цепной комплекс. б) $h_k(D^{(k)}) \subset D^{(k-1)}$, $h_k(D^{(<k)}) \subset D^{(<k)}$.
в) бесконечная композиция $h := h_0 \circ h_1 \circ h_2 \circ \cdots : C_*(A) \to C_*(A)$ корректно определена.
г) $x - h(x) \in D_*(A)$. д) $h \simeq \mathrm{id} : C_*(A) \to C_*(A)$. е) h задаёт цепную эквивалентность $C_*(A) \simeq C_*^N(A)$.

▷ Вывод: $C_*^N(A) \subset C_*(A)$ — прямое слагаемое, и гомологии у этих комплексов одинаковы.

Задача ∞.6. $N : Cat \to sSet$ — а) корректно определённый; б) полный и строгий функтор.

Задача ∞.7. а) Естественное преобразование $\alpha : F \Rightarrow G$ функторов между малыми категориями $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ задаёт гомотопию $BF \sim BG : B\mathcal{C} \to B\mathcal{D}$.
б) Пара сопряжённых функторов $\mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D}$ задаёт гомотопическую эквивалентность $B\mathcal{C} \simeq B\mathcal{D}$.
в) Если $\mathcal{C} =$ "$(\bullet \rightleftarrows \bullet)$" — категория из двух объектов, в которой только два неединичных морфизма, то $B\mathcal{C} \cong S^\infty$ со стандартной CW-структурой.

Задача ∞.8. Если $\mathcal{C}$ — категория с одним объектом $*$, и $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(*,*) = G$ — группа, то $B\mathcal{C} = K(G,1)$.

Задача ∞.9. Для любого $Y \in Top$ симплициальное множество $\mathrm{Sing}_\bullet Y$ — *комплекс Кана* (то есть, всякий морфизм $\Lambda_i[n] \to \mathrm{Sing}_\bullet Y$ можно продолжить до $\Delta[n] \to \mathrm{Sing}_\bullet Y$).

Задача ∞.10*. Симплициальное множество $X_\bullet$ — нерв
а) категории $\iff$ всякий морфизм $\Lambda_i[n] \to X$, $0 < i < n$, однозначно продолжается до $\Delta[n] \to X$.
б) группоида $\iff$ всякий морфизм $\Lambda_i[n] \to X$, $0 \leq i \leq n$, однозначно продолжается до $\Delta[n] \to X$.