Листок 2.

Задача 1.

(a) Докажите, что на множестве бесконечных десятичных дробей выполняется **аксиома полноты**: *любые два непустых множества, одно из которых лежит левее другого, можно разделить некоторым числом.*

(b) С помощью аксиомы полноты докажите существование числа $\sqrt{3}$. Докажите, что это иррациональное число.

Задача 2. (a) Заяц прыгает по окружности против часовой стрелки прыжками одинаковой длины, причем никогда не попадает в свой след. Окружность пересекает узкий ручеек. Докажите, что рано или поздно заяц наступит лапой в ручей.

(b) Докажите, что найдется бесконечно много степеней двойки, десятичная запись которых имеет вид 2027...

Задача 3. Точки плоскости с целочисленными координатами окружены кружками радиусом 5^{-2027}. Докажите, что всякая прямая, проходящая через начало координат, пересекает бесконечно много кружков.

Точка a называется **предельной точкой** *множества E, если во всяком интервале (открытом круге), содержащем точку a, бесконечно много точек множества E.* Если точка a принадлежит E и не является предельной точкой множества E, то a называется **изолированной точкой**.

Задача 4. Пусть все точки бесконечного множества $E \subset \mathbb{R}$ изолированные.

(a) Приведите примеры, когда множество предельных точек этого множества пусто, состоит из N различных точек, является бесконечным множеством.

(b) Может ли множество предельных точек E быть континуальным?

Задача 5. Найдите все предельные точки множества E, где

(a) $E = \{\operatorname{tg} n\colon\ n \in \mathbb{N}\}$, (b) $E = \{\sin n\colon\ n \in \mathbb{N}\}$, (c) $E = \{\,\{\sqrt{2}n\}\colon\ n \in \mathbb{N}\}$,

(d) $E = \{\sqrt{m} - \sqrt{n}\colon\ m, n \in \mathbb{N}\}$. Через $\{x\}$ обозначаем дробную часть x.

Задача 6. Из некоторого множества удалили все его изолированные точки, затем из того множества, которое получилось, опять удалили все изолированные точки и так далее. Возможно ли такую процедуру проделать бесконечное число раз, причем так, что каждый раз найдется, что удалить?

Задача 7. Докажите, что в определении множества вещественных чисел можно аксиому полноты заменить на утверждение: *всякое бесконечное ограниченное множество имеет предельную точку.*

Задача 8. Докажите, что во всякой последовательности есть монотонная подпоследовательность.

Задача 9. Пусть последовательность неотрицательных чисел a_n такова, что $a_{n+m} \le a_n + a_m$. Докажите, что существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{n}$.

Задача 10. Пусть (p_{nm}) — бесконечная вправо и вниз матрица из неотрицательных чисел, $p_{nm} = 0$ при $m > n$, $\sum\limits_{m=1}^{n} p_{nm} = 1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} p_{nm} = 0$. Докажите, что если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \big(p_{n1}a_1 + \ldots + p_{nn}a_n\big) = a$.

Задача 11.(Теорема Штольца)

(a) Пусть y_n – строго возрастающая последовательность положительных чисел и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$. Докажите, что из равенства $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = A$ следует равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = A$.

(b) Пусть y_n – строго убывающая последовательность и верны равенства $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Докажите, что из равенства $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = A$ следует равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = A$.

(c) Найдите предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{m+1}} \sum\limits_{k=1}^{n} k^m$.

Задача 12. Пусть $a > 1$ и $k \in \mathbb{N}$. Докажите, что

$$(a)\ \lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0, \quad (b)\ \lim_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n^{1/k}} = 0, \quad (c)\ \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0, \quad (d)\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Задача 13.

(a) Докажите, что $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ возрастает, $y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ убывает, последовательности x_n и y_n сходятся к одному числу. Это число принято обозначать через e.

(b) Обоснуйте неравенства $n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 1 < (n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

(c) Докажите, что для каждого n найдется число $0 < \theta_n < 1$, с которым верно равенство

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta_n}{nn!}.$$

(d) Обоснуйте иррациональность числа e.

Задача 14.

(a) Докажите, что последовательность $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ стремится к $+\infty$.

(b) Докажите, что последовательность $y_n = x_n - \ln n$ убывает, последовательность $z_n = x_n - \ln(n+1)$ возрастает, и верна оценка $y_n - z_n \leq 1/n$.

(c) Выведите из (b), что найдутся такие число $C > 0$ и стремящаяся к нулю последовательность ε_n, для которых верно равенство $x_n = \ln n + C + \varepsilon_n$.

(d) Колоду игральных карт (длина каждой равна 10 см) кладут на край стола и сдвигают относительно друг друга так, чтобы образовался выступ возможно большей длины. Края карт должны быть параллельны краю стола. Найдите длину наибольшего выступа, если в колоде n карт.

(e) Вы держите один конец резинового шнура длиной 1 км. От второго его конца, который закреплен, к вам со скоростью 1 см/с ползет жук. Каждый раз, как только он проползает 1 см, вы удлиняете резинку на 1 км. Доползет ли жук до вашей руки? Если да, то оцените сколько ему потребуется времени?

Задача 15. Докажите, что при $a \in [-3;1] \cup \{-8\}$ последовательность x_n, заданная соотношениями $x_1 = \dfrac{a}{2}$, $x_{n+1} = \frac{a}{2} + \frac{x_n^2}{2}$ сходится. Докажите, что помимо указанных выше значений параметра a существует бесконечно много значений a, при которых данная последовательность сходится.

Задача 16. Пусть задан не более чем счетный набор ограниченных последовательностей

$$\{a_n\}, \quad \{b_n\}, \quad \{c_n\}, \ldots.$$

Докажите, что существует такая возрастающая последовательность номеров $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$, что каждая из подпоследовательностей $\{a_{n_k}\}$, $\{b_{n_k}\}$, $\{c_{n_k}\}, \ldots$ сходится.

Задача 17. Найдите все подмножества числовой прямой, которые могут являться множествами частичных пределов такой последовательности a_n, что $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = 0$.

Задача 18. Сходится ли последовательность $a_n = \sin(2^n)$?

Задача 19. Докажите, что для всякой последовательности a_n с положительными членами выполнено

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\frac{1+a_{n+1}}{a_n}\right)^n \geq e,$$

причем оценка неулучшаема.

Задача 20. Пусть x и y — произвольные положительные числа. Докажите, что последовательность (a_n), заданная рекуррентным соотношением $a_{n+1} = \dfrac{2}{a_n + a_{n-1}}$, где $a_1 = x$, $a_2 = y$, сходится и найдите ее предел.