Листок 2-2.

Ряды

Задача 1. Пусть $|q| < 1$. Обоснуйте сходимость и найдите суммы:
(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$, (b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} nq^n$, (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$, (d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.
(e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{10^n}$, где f_n – числа Фибоначчи, т. е. $f_1 = 1$, $f_2 = 1$ и $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$.

Задача 2. Пусть (a_n) и (b_n) — последовательности положительных чисел, причем $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n}$. Докажите, что из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Задача 3. Пусть $a_n \ge a_{n+1} > 0$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$. Покажите на примере, что от монотонности последовательности (a_n) в этом утверждении отказаться нельзя.

Задача 4. Докажите, что для всякого сходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ существует такая возрастающая последовательность положительных чисел (c_n), что $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = +\infty$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n a_n$ сходится.

Задача 5. Пусть $a_n > 0$. Могут ли ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 a_n}$ сходиться одновременно?

Задача 6. Для каждого натурального числа $k \ge 2$ приведите пример такого сходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^k$ расходится.

Задача 7. Приведите пример ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ такого, что для всякого числа A существует возрастающая последовательность номеров n_k, для которой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \Big(\sum\limits_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} a_j \Big)$ сходится к числу A.

Задача 8. Переставим члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ так, что группу p последовательных положительных слагаемых сменяла группа q отрицательных слагаемых. Докажите, что сумма так переставленного ряда равна $\ln 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{p}{q}$.

Задача 9. Пусть все члены последовательности (a_n) неотрицательны и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Для всякого непустого подмножества $A \subset \mathbb{N}$ определим величину $S(A)$ равенством $S(A) = \sum_{n\in A} a_n$. Почему порядок суммирования в правой части можно выбрать любой? По определению полагаем $S(\emptyset) = 0$. Докажите, что для функции $S\colon 2^{\mathbb{N}} \to [0; +\infty)$ справедливы следующие утверждения:
1) если $A \subset B \subset \mathbb{N}$, то $S(A) \le S(B)$; 2) если $A, B \subset \mathbb{N}$ и $A \cap B = \emptyset$, то $S(A \cup B) = S(A) + S(B)$.

Задача 10. Пусть в условиях предыдущей задачи $a_n = 2^{-n}$. Для всякого натурального числа m и целого числа $0 \le r < m$ вычислите $S(\{n\colon\ n = mq + r, q \in \mathbb{N}\})$.

p-адические числа

Пусть p – простое число. Если $a \in \mathbb{Z}$ и $a = p^k a'$, где $m \geq 0$ и $(a', p) = 1$, то $|a|_p = p^{-k}$. По определению $|0|_p = 0$ и $|a/b|_p = |a|_p/|b|_p$. Поле p-адических чисел – пополнение поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$ относительно $|\cdot|_p$.

Задача 11. Найдите (a) $|p!|_p$ (b) $|n!|_p$.

Задача 12. Докажите, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится в $\mathbb{Q}_p$ тогда и только тогда, когда последовательность $|a_n|_p$ стремится к нулю; последовательность a_n сходится тогда и только тогда, когда $|a_{n+1} - a_n|_p$ стремится к нулю.

Задача 13. Докажите, что ряды (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p^n$ и (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!n$ сходятся в $\mathbb{Q}_p$ и найдите их суммы.

Задача 14. Пусть $k \in \mathbb{N}$ и $(k, p) = 1$. Докажите, что $a_n = k^{p^n}$ сходится в $\mathbb{Q}_p$ к некоторому α. Докажите, что $\alpha^{p-1} = 1$.

Задача 15. Докажите, что последовательность $a_n = 1/n$ не сходится в $\mathbb{Q}_p$. Докажите, что множество $\{1/n\}_{n=1}^{\infty}$ всюду плотно в $\{x \in \mathbb{Q}_p \colon |x|_p \geq 1\}$.

Задача 16. Докажите, что всякое p-адическое число a единственным образом представляется в виде ряда

$$a = c_{-m}p^{-m} + \ldots + c_0 + c_1 p + c_2 p^2 + c_3 p^3 + \ldots, \quad c_k \in \{0, 1, \ldots, p-1\}, c_{-m} \neq 0.$$

Далее по аналогии с бесконечными десятичными дробями, представляющими вещественные числа, записываем p-адические числа в виде $\ldots c_2 c_1 c_0, \ldots c_{-m}$. Такая запись называется каноническим p-адическим разложением числа.

Задача 17. Найдите каноническое разложение
(a) 35 в $\mathbb{Q}_5$, (b) 6! в $\mathbb{Q}_3$, (c) $1/2$ в $\mathbb{Q}_p$.

Задача 18. p-адическое число a имеет каноническое разложение $\ldots c_2 c_1 c_0, \ldots c_{-m}$. Найдите каноническое разложение для $-a$.

Задача 19. Найдите четыре цифры канонического разложения числа
(a) $\ldots 1246 \times \ldots 6003$ в $\mathbb{Q}_7$, (b) $1 : \ldots 1323$ в $\mathbb{Q}_5$, (c) $900 - \ldots 312,3$ в $\mathbb{Q}_{11}$.

Задача 20. Существуют ли $\sqrt{6}$ и $\sqrt{7}$ в $\mathbb{Q}_5$?