Листок 3.

Метрическое пространство

Задача 1. Существует ли метрика на $\mathbb{R}^2$, относительно которой открытый единичный шар с центром в начале координат является внутренностью треугольника, а шар радиуса два с центром в начале координат является внутренностью квадрата.

Задача 2. Всякое ли метрическое пространство из четырех точек можно изометрично (изометрией называется биекция, сохраняющая расстояния) вложить в $\mathbb{R}^3$?

Задача 3. Пусть $X = \{0,1\}^n$, $\varrho(x,y) = \sum\limits_{j=1}^{n} |x_j - y_j|$.

(a) Найдите число элементов в замкнутом шаре радиуса k.

(b) (код Хэмминга) Рассмотрим следующий способ передачи последовательности из 0 и 1, при котором по полученной последовательности можно исправить ровно одну ошибку, т. е. узнать в каком бите произошла эта ошибка. В последовательности из $2^m - 1$ битов биты с номерами $1, 2, 4, \ldots$ назовем служебными, а в остальные биты запишем информацию, которую хотим передать. В служебный бит с номером 2^k запишем сумму (по модулю 2) цифр в битах, номера которых в двоичной записи содержат 1 на k-м месте. Тогда сумма цифр в битах (включая служебный), номера которых в двоичной записи содержат 1 на k-м месте, равна нулю. После получения последовательности для каждого k вычисляем сумму цифр в битах, номера которых в двоичной записи содержат 1 на k-м месте. Покажите, что в итоге получается номер бита, при передаче которого произошла ошибка.

(c) Докажите, что при $n = 2^m - 1$ булев куб $X = \{0,1\}^n$ можно представить в виде объединения непересекающихся замкнутых шаров единичного радиуса, а при других значениях n этого сделать нельзя.

Задача 4. Функция g определена на $[0, +\infty)$ и является вогнутой, т.е.

$$g(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq \alpha g(x) + (1-\alpha)g(y)$$

для всех $x, y \in [0, +\infty)$ и $\alpha \in [0,1]$. Предположим также, что $g(0) = 0$ и $g(x) > 0$ при $x > 0$. Докажите, что для всякой метрики ϱ, функция $g(\varrho)$ является метрикой. Проверьте, что можно в качестве g взять $g(t) = \frac{t}{1+t}$ и $g(t) = \min\{1, t\}$.

Задача 5. Выясните, какие из следующих последовательностей сходятся в пространстве ограниченных функций $B((0,+\infty))$ с равномерной метрикой:

(a) $f_n(x) = \sin\Big(\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}\Big)$, (b) $f_n(x) = 2^{-nx}$, (c) $f_n(x) = 2^{-(x-n)^2}$.

Задача 6. Пусть последовательность многочленов P_n такова, что $\deg P_n \leq m$ для всех n и для всякого $x \in [0,1]$ у последовательности $P_n(x)$ существует предел $f(x)$. Докажите, что f является многочленом степени не выше m и последовательность P_n равномерно сходится к f на $[0,1]$.

Задача 7. Покажите, что $\mathbb{N}$ с метрикой $\varrho(m,n) = 1 + \frac{1}{\min\{n,m\}}$ при $n \neq m$ и $\varrho(m,n) = 0$ при $m \neq n$ является полным метрическим пространством. Укажите в этом пространстве последовательность вложенных замкнутых шаров, у которых нет общей точки.

Задача 8. Пусть (X, ϱ) — сепарабельное метрическое пространство и $Y \subset X$. Докажите, что пространство (Y, ϱ) сепарабельно.

Задача 9. При каких условиях на функцию $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ функция $\varrho(x,y) = |f(x) - f(y)|$ является метрикой на $\mathbb{R}$? Всегда ли пространство $\mathbb{R}$ с такой метрикой будет полным? Всегда ли пространство $\mathbb{R}$ с такой метрикой будет сепарабельным?

Задача 10. С помощью теоремы Банаха о сжимающем отображении докажите, что числовая последовательность $x_{n+1} = f(x_n)$, $x_1 = 1$, сходится и найдите ее предел, если $f(x) = \sqrt{2+x}$ или $f(x) = 2 + 1/x$.

Топология

Задача 11. Функция f на числовой прямой такова, что у всякой точки есть окрестность, в которой функция f совпадает с некоторым многочленом. Докажите, что f — многочлен.

Задача 12. Пусть подмножество E числовой прямой вместе со всякими своими точками x и y содержит $(x+y)/2$. Предположим, что у множества E есть внутренняя точка. Докажите, что множество E является промежутком.

Задача 13. Докажите, что замкнутое более чем счётное множество на числовой прямой континуально.

Задача 14. Постройте всюду плотное множество в $\mathbb{R}^n$, которое с каждой прямой пересекается по не более чем двум точкам. Верно ли, что множество в $\mathbb{R}^n$ замкнуто (открыто) тогда и только тогда, когда его пересечение со всякой прямой замкнуто (открыто)?

Задача 15. Пусть A — матрица $m \times n$. Докажите, что множество $\{Ax\colon\ x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0\}$ замкнуто в пространстве $\mathbb{R}^m$.

Задача 16. Покажите, что множество чисел отрезка $[0;1]$, в десятичной записи которых НЕ встречается последовательный набор 22533, является нигде не плотным.

Задача 17. (a) Докажите, что всякое открытое множество в $\mathbb{R}^n$ является объединением счётного набора замкнутых множеств, а всякое замкнутое множество в $\mathbb{R}^n$ является пересечением счётного набора открытых множеств.

(b) Приведите пример множества, которое не является объединением конечного или счётного набора замкнутых множеств.

(c) Приведите пример множества, которое не является объединением конечного или счётного набора замкнутых множеств и не является пересечением конечного или счётного набора открытых множеств.

Задача 18. Можно ли $\mathbb{R}^n$ представить в виде объединения попарно непересекающихся замкнутых шаров положительного радиуса?

Задача 19. Пусть $\mathcal{K}$ – все непустые компактные подмножества куба $[0,1]^n$. Докажите, что метрика Хаусдорфа

$$d(A,B) = \max\Big\{\sup_{a\in A} d(a,B), \sup_{b\in B} d(b,A)\Big\}$$

является метрикой на $\mathcal{K}$ и пространство $(\mathcal{K}, d)$ полно.

Задача 20. Пусть $f_j\colon [0,1]^n \to [0,1]^n$, где $j = 1, 2 \ldots, m$, – сжимающие отображения. Докажите, что отображение $F\colon \mathcal{K} \to \mathcal{K}$, заданное равенством

$$F(K) = f_1(K) \cup f_2(K) \cup \ldots \cup f_m(K)$$

является сжимающим. Покажите, что канторовское множество является неподвижной точкой отображения F, порожденного функциями $f_1(x) = x/3$ и $f_2(x) = (2+x)/3$.

Задача 21. Докажите, что множество A в пространстве $c_0 = \{(x_n)\colon\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0\}$ с метрикой $\varrho(x,y) = \sup\limits_n |x_n - y_n|$ является вполне ограниченным тогда и только тогда, когда множество A ограничено и

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in A} |x_n| = 0.$$

Задача 22. Пусть $c = \{(x_n)\colon\ \exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n\}$ с метрикой $\varrho(x,y) = \sup_n |x_n - y_n|$. Докажите, что множество $A \subset c$ вполне ограничено тогда и только тогда, когда оно ограничено и для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что для всех $x \in A$ и всех $n, m > N$ верна оценка $|x_n - x_m| < \varepsilon$.