Листок 4.

Непрерывные функции на числовой прямой

Задача 1. Докажите, что множество рациональных чисел является множеством точек разрыва *функции Римана* $R(x) = 1/n$, если $x = m/n$, где m/n — несократимая дробь, $R(0) = 1$, и $R(x) = 0$ во всех иррациональных точках.

Задача 2. Пусть $\mathbb{Q} = \{r_n\}$ и $f(x) = \sum_{n:\ r_n \le x} 2^{-n}$. Найдите все точки непрерывности функции f.

Задача 3.

(a) Пусть F — непустое замкнутое подмножество числовой прямой. Положим $f(x) = 0$ при $x \notin F$, $f(x) = 1$ при $F \setminus \mathbb{Q}$ и $f(x) = 2$ при $x \in F \cap \mathbb{Q}$. Докажите, что множество точек разрыва функции f совпадает с множеством F, причём $\omega_f(a) \ge 1$ для всех $a \in F$.

(b) Пусть теперь $\{F_n\}$ — не более чем счётный набор замкнутых множеств на числовой прямой, причём $F_n \subset F_{n+1}$. Для каждого n через f_n обозначим функцию, построенную (как в пункте (a)) для множества F_n. Докажите, что множество точек разрыва функции $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 100^{-n} f_n(x)$ совпадает с объединением $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$.

Задача 4. Может ли всюду разрывная функция всякий промежуток отображать в промежуток?

Задача 5. Существует ли такая непрерывная функция $f\colon [0,1] \to [0,1]$, что $f(f(x)) = 1 - x^{2027}$ при всех $x \in [0,1]$?

Задача 6. Пусть функция $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ непрерывна, причём $f(0) = f(1)$. Докажите, что для всякого натурального числа n найдётся горизонтальный отрезок с концами на графике этой функции, длина которого равна $1/n$. Докажите, что если число l не имеет вид $1/n$, то найдётся функция указанного выше вида, в график которой уже нельзя вписать горизонтальный отрезок длины l.

Задача 7. Пусть g — функция Кантора. Докажите, что

(a) $g(x+y) \le g(x) + g(y)$,

(b) $\sup_{|x-y|\le\delta} |g(x) - g(y)| = g(\delta)$,

(c) $|g(x) - g(y)| \le |x-y|^{\alpha}$, где $\alpha = \log_3 2$.

Задача 8.

(a) Докажите, что если непрерывная на числовой прямой функция f удовлетворяет тождеству $f(x+y) = f(x) + f(y)$, то $f(x) = cx$ для некоторого c.

(b) Существует ли разрывная функция, для которой выполняется тождество из пункта (a)?

(c) Можно ли в пункте (a) заменить непрерывность на монотонность?

(d) Можно ли в пункте (a) заменить непрерывность на ограниченность функции f в некоторой окрестности нуля?

Задача 9. Найдите все такие непрерывные функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, что

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y) \quad \text{для всех} \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Задача 10. Найдите все такие непрерывные функции f на $[0,1]$, что

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt[5]{|f(\tfrac{k-1}{n}) - f(\tfrac{k}{n})|} \le 1 \quad \text{для всех} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Непрерывные функции на $\mathbb{R}^n$

Задача 11. *Множеством уровня* функции f называется всякое множество $\{x\colon f(x) = const\}$. Изобразите множества уровня функции:

(a) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$; (b) $f(x,y,z) = |x| + |y| + |z|$; (c) $f(x,y,z) = (x-z)^2 + y^2$.

Задача 12. Положим $f(x) = k$ при $x \in [k; k+1)$, где $k \in \mathbb{Z}$. Изобразите множества уровня функции $F(x,y) = f(x) + \sqrt{5} f(y)$.

Задача 13. Покажите, что многочлен $(1-xy)^2 + y^2$ всегда отличен от нуля, но может принимать сколь угодно малые значения. Возможно ли такое для многочлена одной переменной?

Задача 14.

(a) Приведите пример функции $f(x,y)$, которая непрерывна вдоль всякой прямой, но разрывна по совокупности переменных.

(b) Пусть $f(x,y)$ непрерывна по каждой переменной в отдельности. Докажите, что найдётся хотя бы одна точка, в которой f непрерывна по совокупности переменных.

(c) Пусть $f(x,y)$ непрерывна по x и равномерно непрерывна по y, т. е. $\sup\limits_x |f(x,y) - f(x,y_0)| \to 0$ при $y \to y_0$. Докажите, что f непрерывна по совокупности переменных.

Задача 15. Докажите, что не существует таких непрерывных на $\mathbb{R}$ функций h, φ, ψ, что для всех $(x,y) \in [0,1] \times [0,1]$ верно равенство

$$xy = h(\varphi(x) + \psi(y)).$$

Задача 16. Докажите, что не существует непрерывной биекции:
(a) отрезка на квадрат; (b) отрезка на окружность; (c) окружности на круг.

Непрерывные функции на метрическом пространстве

Задача 17. Пусть (X, ϱ) – метрическое пространство.

(a) Пусть $A \subset X$ и $f(x) = dist(x,A) = \inf\{\varrho(x,y)\colon\ y \in A\}$. Докажите, что $|f(x) - f(z)| \leq \varrho(x,z)$.

(b) Докажите, что множество нулей непрерывной функции $X \to \mathbb{R}$ является замкнутым множеством и всякое замкнутое множество является множеством нулей некоторой непрерывной функции.

(c) Докажите, что для всяких двух непересекающихся замкнутых множеств существует непрерывная функция, которая равна нулю на одном из них и единице на другом.

Задача 18. Пусть (X, ϱ) — метрическое пространство и $\varphi \in C_b(X)$. Положим
$f_k(x) = \inf_y \Big\{k\varrho(x,y) + \varphi(y)\Big\}$ и $\Phi_k(x) = \sup_y \Big\{-k\varrho(x,y) + \varphi(y)\Big\}$.
Докажите, что (a) $-\sup_X |\varphi(x)| \leq f_k(x) \leq \varphi(x) \leq \Phi_k(x) \leq \sup_X |\varphi(x)|$;
(b) $f_k(x) \leq f_{k+1}(x)$, $\Phi_{k+1}(x) \leq \Phi_k(x)$;
(c) $|f_k(x) - f_k(z)| \leq k\varrho(x,z)$, $|\Phi_k(x) - \Phi_k(z)| \leq k\varrho(x,z)$;
(d) $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = \lim_{k\to\infty} \Phi_k(x) = \varphi(x)$, причем на компактах сходимость равномерная.

Задача 19. (a) Верно ли, что множество в метрическом пространстве компактно тогда и только тогда, когда на нем всякая непрерывная функция ограничена?

(b) Верно ли, что множество в метрическом пространстве компактно тогда и только тогда, когда на нем всякая непрерывная функция равномерно непрерывна?

Задача 20. Пусть (X, ϱ) — метрическое пространство и $f\colon X \to [-1,1]$. Докажите, что f непрерывна тогда и только тогда, когда график f замкнут в $X \times \mathbb{R}$ (из $x_n \to x$ и $f(x_n) \to y$ следует, что $f(x) = y$). Можно ли в этом утверждении отказаться от ограниченности f, т. е. заменить $[-1,1]$ на $\mathbb{R}$?