НМУ, 2 курс, анализ на многообразиях. Листок 3.
Касательные векторы и поля,
дифференциал отображения. 2.10.2026.

Задача 1. Рассмотрим окружность $\mathbb{S}^1$, заданную уравнением

$$x^2 + y^2 = 1,$$

и точку $P = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Найти базис в касательном пространстве $T_P\mathbb{S}^1$ в терминах объемлющего пространства $\mathbb{R}^2$.

Задача 2. Описать в терминах объемлющего пространства $\mathbb{R}^3$ касательное пространство $T_P\mathbb{S}^2$ к сфере $\mathbb{S}^2$, заданной уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

в точке $P = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

Задача 3. Пусть X такой касательный вектор в точке P из предыдущей задачи, что его координаты, соотвествующие стереографической проекции из северного полюса равны $(1, 1)$. Найти координаты этого вектора, соотвествующие стереографической проекции из южного полюса.

Задача 4. Рассмотрим точку P и вектор X из предыдущих двух задач. Пусть $f : \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ ограничение функции z на сферу. Найти Xf.

Задача 5. Рассмотрим на стандартной сфере $\mathbb{S}^2$, заданной уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

функцию $f(x, y, z) = z$. Запишите эту функцию в локальных координатах u, v, соотвествующих стереографической проекции из северного полюса. Найдите её дифференциал df в этих координатах. Найдите значение $d_P f(X)$ этого дифференциала в точке $P = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ на касательном векторе $X = \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}$. Сравните результат с результатом предыдущей задачи.

Задача 6. Рассмотрим декартовы и полярные координаты в плоскости $\mathbb{R}^2$. Записать векторные поля $X = \frac{\partial}{\partial r}$ и $Y = \frac{\partial}{\partial \varphi}$ в базисе $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ и найти их коммутатор посредством вычисления по явной формуле в данном базисе.

Задача 7. Доказать следующую теорему об обратной функции для многообразий. Пусть $f : M \longrightarrow N$ гладкое отображение многообразий, такое, что в точке $p \in M$ отображение $d_p f : T_p M \longrightarrow T_{f(p)} N$ является изоморфизмом. Тогда существует такая окрестность U точки p, что отображение $\psi : U \longrightarrow \psi(U)$ является диффеоморфизмом на открытое множество $\psi(U)$.

Задача 8. Пусть M многообразие размерности k, а $f_1, \ldots, f_k$ такие функции на M, что их дифференциалы линейно независимы в некоторой точке $p \in M$. Доказать, что в некоторой окрестности точки p функции $f_1, \ldots, f_k$ можно взять в качестве локальных координат.

Задача 9. Пусть M многообразие размерности k, а $f_1, \ldots, f_l$, $l < k$, такие функции на M, что их дифференциалы линейно независимы в некоторой точке $p \in M$. Доказать, что в некоторой окрестности точки p функции $f_1, \ldots, f_l$ можно дополнить до системы локальных координат.

Задача 10. Пусть $f : M \longrightarrow N$ гладкое отображение многообразий, такое, что в точке $p \in M$ отображение $d_p f : T_p M \longrightarrow T_{f(p)} N$ сюръективно. Доказать, что если в окрестности $f(p) \in N$ функции $x^1, \ldots, x^l$ образуют локальную систему координат, то функции $x^1 \circ f, \ldots, x^l \circ f$ можно дополнить до системы локальных координат в некоторой окрестности точки p.