Листок 4, 2026 г.

Задача 1. Что получится, если разрезать ленту Мебиуса по средней линии? А если повторить эту процедуру?

Задача 2. Докажите, что следующие определения $\mathbb{R}P^n$ эквивалентны:

1. сфера в $\mathbb{R}^{n+1}$ с отождествленными противоположными точками;
2. диск D^n с отождествленными противоположными точками границы $\delta D^n = S^{n-1}$;
3. множество всех прямых в $\mathbb{R}^{n+1}$, проходящих через начало координат (введите на этом множестве естественную топологию);
4. множество всех гиперплоскостей в $\mathbb{R}^{n+1}$, проходящих через начало координат (введите на этом множестве естественную топологию).

Задача 3. Докажите, что следующие пространства попарно гомеоморфны (по определению, все они называются комплексным проективным пространством $\mathbb{C}P^n$):

1. сфера S^{2n+1} в $\mathbb{C}^{n+1} = \mathbb{R}^{2n+2}$ с отождествленными точками вида $x \sim \lambda x$ для $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$;
2. иск $D^{2n} \subset \mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$ с отождествленными противоположными точками границы $\delta D^{2n} = S^{2n-1}$ вида $x \sim \lambda x$ для $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$;
3. множество всех комплексных прямых $\mathbb{C}$ в $\mathbb{C}^{n+1}$, проходящих через начало координат (введите на этом множестве естественную топологию);
4. множество всех гкомплексных иперплоскостей $\mathbb{C}^n$ в $\mathbb{C}^{n+1}$, проходящих через начало координат (введите на этом множестве естественную топологию).

Задача 4. Докажите, что $S^n * S^m = S^{n+m+1}$.

Задача 5. Докажите, что цилиндр $S^1 \times I_{[0,1]}$ негомеоморфен ленте Мебиуса.

Задача 6. Докажите, что $C(D^n) = D^{n+1}$, $C(S^n) = D^{n+1}$, $\Sigma(D^n) = D^{n+1}$, $\Sigma(S^n) = S^{n+1}$.

Задача 7. Докажите, что $\mathbb{R}P^1 = S^1$, $\mathbb{C}P^1 = S^2$.

Задача 8. Обобщите фактор-конструкцию для тора T^2, показанную на лекции, на случай сферы S^2 с $g \geqslant 2$ приклеенными ручками.

Задача 9. Верны ли следующие формулы?

1. $X * Y = Y * X$,
2. $(X * Y) * Z = X * (Y * Z)$,

3. $C(X * Y) = C(X) * Y$,

4. $\Sigma(X * Y) = \Sigma(X) * Y$.

Задача 10. Пусть X, Y – CW комплексы. Введите естественные структуры CW комплексов на $X \times Y, C(X), \Sigma(X), X * Y$.

Задача 11. Покажите, что в определении CW комлекса аксиомы C и W являются ограничительными (то есть существуют такие пространства, "сделанные из клеток", что для них выполняется аксиома C, но не выполняется W, и наоборот).

Задача 12. * Докажите, что $\mathbb{R}P^2$ негомеоморфно сфере S^2.