Листок 3, 2 марта 2026 г.

Задача 1. Докажите, что $(\mathbb{R}/\sim) \simeq S^1$, где $a \sim a+n$ для любых $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$.

Задача 2. Докажите, что $\mathbb{D}^n/S^{n-1} \simeq S^n$.

Задача 3. Верно ли, что фактор хаусдорфова пространства является хаусдорфовым? Регулярного – регулярным? Нормального – нормальным?

Задача 4. Приведите пример хаусдорфова нерегулярного топологического пространства.

Задача 5. Приведите пример регулярного ненормального топологического пространства.

Задача 6. Приведите пример связного, но не линейно связного топологического пространства.

Задача 7. Определите естественную топологию на пространства невырожденных матриц $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$. Является ли оно связным?

Задача 8. Докажите, что функции расстояния

$$d_1(x,y) = \sum_i |x_i - y_i|, \qquad d_2(x,y) = (\sum_i (x_i - y_i)^2)^{1/2} \qquad d_\infty = \max_i(|x_i - y_i|)$$

задают структуру метрического пространства на $\mathbb{R}^n$. Нарисуйте открытые шары B_0^1 в метриках d_i при $n = 2$.

Задача 9. Докажите, что топология на $\mathbb{R}^n$, индуцированная метриками d_i выше, совпадает с топологией произведения, определенной на лекции.

Задача 10. Пусть X, Y – метрические пространства. Определите естественную метрику на их произведении $X \times Y$.

Задача 11. Предположим, что в метрическом пространстве X выполнено $B_x^{\epsilon_1} = B_y^{\epsilon_2}$ для некоторых точек x, y и некоторых $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$. Верно ли, что $x = y$, $\epsilon_1 = \epsilon_2$?

Задача 12. Определим топологию Зариского на $\mathbb{C}^n$ следующим образом: замкнутыми множествами назовем множества нулей произвольного набора многочленов из $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$. Проверьте, что это действительно топология. Является ли она хаусдорфовой? Совпадает ли топология Зариского на $\mathbb{C}^2$ с топологией произведения, полученной из топологии Зариского на $\mathbb{C}$?