Листок 6, 30 марта 2026 г.

Задача 1. Пусть X представляется в виде объединения своих замкнутых подмножеств $X = X_1 \cup \ldots \cup X_n$. Рассмотрим отображение $f\colon X \to Y$. Докажите, что если ограничение $f|_{X_i}$ непрерывно для любого i, то f непрерывно.

Задача 2. Докажите, что $\pi_1(X, x)$ является группой (то есть аккуратно проверьте выполнение групповых аксиом).

Задача 3. На лекции мы показали, что если X линейно связно, то корректно определена фундаментальная группа $\pi_1(X)$ (не зависящая от выбора точки на X). Пусть X, Y – линейно связные пространства. Докажите, что корректно определено индуцированное отображение $f_*\colon \pi_1(X) \to \pi_1(Y)$.

Задача 4. Докажите, что если X стягиваемо, то $\pi_1(X) = 0$.

Задача 5. Существует ли ретракция ленты Мебиуса на границу?

Задача 6. Найдите эйлерову характеристику ленты Мебиуса и бутылки Клейна.

Задача 7. Рассмотрим фактор $(S^1 \times S^1)/(x, y) \sim (y, x)$. Это поверхность. Какая?

Задача 8. Докажите, что граница цилиндра над листом Мебиуса $\mathrm{Mob} \times [0, 1]$ гомеоморфна бутылке Клейна.

Задача 9. Докажите, что минимальное число вершин в триангуляции тора равно 7 (воспользуйтесь формулой Эйлера).

Задача 10. Докажите, что минимальное число вершин в триангуляции проективной плоскости равно 6 (воспользуйтесь формулой Эйлера).

Задача 11. Рассмотрим многогранник X в $\mathbb{R}^3$ как регулярный клеточный комплекс. Пусть X^1 – его 1-остов, и Y – его ϵ-окрестности в $\mathbb{R}^3$ для маленького $\epsilon > 0$. Докажите, что $\overline{Y} \setminus Y$ гомеоморфно сфере с ручками и определите количество ручек.

Задача 12. Докажите, что любой граф имеет максимальный подграф, являющийся деревом. Докажите, что симплициальная окрестность (после взятия двойного барицентрического подразбиения) дерева в триангулированной поверхности гомеоморфна диску.