НМУ, 2 курс, дифференциальная геометрия. Листок 9.
Риманова геометрия. Геодезические. 15.05.2026.

Задача 1. Если ∇ связность в TM, то она продолжается до связностей во всех расслоениях $T^p_q M$. Риманова метрика g является тензором типа $\binom{0}{2}$. Доказать, что ∇ согласована с метрикой g тогда и только тогда, когда $\nabla g = 0$.

Задача 2. Доказать, что для n-мерной сферы $\mathbb{S}^n_r \subset \mathbb{E}^{n+1}$ радиуса r тензор Римана выражается формулой $R(X,Y)Z = \frac{1}{r^2}\left(< Y,Z > X - < X,Z > Y\right)$, а секционная кривизна постоянна, и равна $K = 1/r^2$.

Задача 3. Доказать, что из-за многочисленных симметрий тензор Римана на двумерном многообразии полностью определяется своей компонентой $R^1_{12,2}$. Доказать, что на двумерном многообразии верно тождество $S = \frac{2R_{12,21}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}$.

Задача 4. Доказать, что тензор Риччи связности Леви-Чивита ∇ является симметрическим, $\mathrm{Ric}(X,Y) = \mathrm{Ric}(Y,X)$.

Задача 5. Доказать, что для симметричной связности ∇ имеет место тождество Бианки $(\nabla_X R)(Y,Z,V) + (\nabla_Y R)(Z,X,V) + (\nabla_Z R)(X,Y,V) = 0$, где X, Y, Z и V векторные поля. В компонентах это тождество имеет вид $\nabla_m R^l_{ij,k} + \nabla_i R^l_{jm,k} + \nabla_j R^l_{mi,k} = 0$.

Задача 6. Пусть M риманово многообразие, а ∇ — связность Леви-Чивиты. Определим гессиан гладкой функции по формуле $\mathrm{Hess}\, f = \nabla df$. Ясно, что это билинейная форма. Докажите, что она симметрична и найдите выражение для $\mathrm{Hess}\, f(X,Y)$ в локальных координатах и в «безкоординатном» виде, то есть выразив через дифференциал и ковариантные производные.

Пусть M подмногообразие риманова многообразия $\tilde{M}$, на котором мы рассматриваем индуцированную метрику. Пусть f — гладкая функция на $\tilde{M}$. Найдите соотношение, связывающее гессиан на M ограничения $f|_M$ с гессианом f на $\tilde{M}$ и другими геометрическими объектами.

Задача 7. Интегрируя уравнение геодезических, найти все геодезические на плоскости Лобачевского *как непараметризованные кривые*. Можно взять любую из моделей плоскости Лобаческого, например верхнюю полуплоскость с метрикой $\frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$. *Указание. Очевидно, что* $I_1 = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{y^2}$ *является первым интегралом. Докажите, что есть второй первый интеграл* $I_2 = x + \frac{\dot{y}}{\dot{x}}y$ *и с его помощью найдите* $y(x)$.

Задача 8. Докажите, что при достаточно малых $\delta > 0$ геодезическая $\exp_A tv$ и называемое геодезической сферой радиуса δ с центром в точке A подмногообразие $\exp_A(S_\delta)$, где $S_\delta = \{v \in T_A M \,||v| = \delta\}$, всегда ортогональны друг другу.

Задача 9. Рассмотрим геодезические координаты $x^1, \ldots, x^n$ на римановом многообразии, центрированные в точке A, то есть определённые с помощью отображения $\exp_A$. Доказать, что в этих геодезических координатах геодезические, проходящие через точку A, имеют вид $x^i = a^i t$, где a^i — некоторые константы. Доказать, что в геодезических координатах символы Кристоффеля в точке A обращаются в ноль (в других точках, в общем-то, это неверно).

Доказать, что центрированные в точке A координаты $x^1, \ldots, x^n$, то есть такие координаты, что $A = (0, \ldots, 0)$, определённые в окрестности $U \ni A$, являются геодезическими координатами, центрированными в точке A, тогда и только тогда, когда $\Gamma^i_{jk} x^j x^k \equiv 0$ тождественно по $x^1, \ldots, x^n$ в U.

Задача 10. Доказать, что геодезические в произвольной перепараметризации, лежащие на многообразии M и проходящие через заданные точки A и B, совпадают с экстремалями функционала длины $L[\gamma] = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left|\frac{d\gamma}{dt}(t)\right| dt$, где $\gamma(t_0) = A$, $\gamma(t_1) = B$.