Модули над кольцами.

Задача 1°. Опишите $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-модули.

Задача 2°. Является ли $\mathbb{Z}$-подмодуль в $\mathbb{Z}[x]$, состоящий из всех многочленов с чётным свободным членом **а)** конечно порождённым; **б)** свободным; **в)** отщепимым[1]?

Задача 3°. Является ли $\mathbb{Z}$-модуль **а)** $\mathbb{Z}^n$; **б)** $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^k$; **в)** $(\mathbb{Z}/n^k\mathbb{Z})$ неразложимым? Если модуль разложим, то разложите его в сумму неразложимых.

Задача 4. R-модуль M называется модулем кручения, если для каждого $m \in M$ существует ненулевой элемент $r \in R$ такой, что $rm = 0$. Докажите, что каждая конечная абелева группа является $\mathbb{Z}$-модулем кручения. Приведите пример бесконечной абелевой группы, которая является $\mathbb{Z}$-модулем кручения.

Задача 5. Верно ли, что **а)** ... подмодуль свободного модуля свободен? **б)** ...подмодуль конечнопорождённого модуля конечнопорождён?

Задача 6. а) R-модуль M называется неприводимым, если $M \neq 0$ и если 0 и M являются единственными подмодулями модуля M. Покажите, что M неприводим тогда и только тогда, когда $M \neq 0$ и M является циклическим модулем с любым ненулевым элементом в качестве генератора. Определите все неприводимые $\mathbb{Z}$-модули.
б) Предположим, что R коммутативно. Покажите, что R-модуль M неприводим тогда и только тогда, когда M изоморфен (как R-модуль) R/I, где I – максимальный идеал R.

Задача 7. Докажите, что если R – коммутативное кольцо, то $\mathrm{End}_R(R) \simeq R$ как кольца.

Задача 8. Элемент $e \in R$ называется центральным идемпотентом, если $e^2 = e$ и $er = re$ для всех $r \in R$. Докажите, что $M = eM \oplus (1 - e)M$.

Задача 9. [Лемма Шура] Покажите, что если M_1 и M_2 — неприводимые R-модули, то любой ненулевой гомоморфизм R-модулей из M_1 в M_2 является изоморфизмом. Выведите отсюда, что если M неприводим, то $\mathrm{End}_R(M)$ является кольцом с делением.

Задача 10*. Покажите, что ранг свободного подмодуля свободного модуля не превосходит ранг исходного модуля.

Задача 11*. а) Докажите, что $\prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}$ не является свободным $\mathbb{Z}$-модулем.
б) Пусть $R = \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}\left(\prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}\right)$. Докажите, что $R \simeq R^n$ для любого $n \geq 1$.

Задача 12*. а) Пусть $R = \{f \in C_{[0,1]} \mid f(0) = f(1)\}$, и пусть $M = \{f \in C_{[0,1]} \mid f(0) = -f(1)\}$. Покажите, что M и R – неразложимые R-модули.

б) Покажите, что M и R – неизоморфны.

в) Покажите, что $M \oplus M \cong R \oplus R$.

г) Докажите, что $R = \mathbb{R}[x, y]/(x^2 + y^2 - 1)$ имеет два различных разложения на неразложимые подмодули как R-модуль.

[1] подмодуль N модуля M называется отщепимым, если существует подмодуль N' такой, что $M = N \oplus N'$.