## Билинейные и квадратичные формы-1.

**Задача 1°.** Рассмотрим симметрическую билинейную форму на $\mathbb{R}^5$ с матрицей Грама:

$$B = \begin{pmatrix} -12 & 14 & -5 & -3 & 8 \\ 14 & -17 & 2 & 5 & -8 \\ -5 & 2 & -12 & 3 & 6 \\ -3 & 5 & 3 & -3 & 1 \\ 8 & -8 & 6 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

**а)** Найдите ранг и сигнатуру $B$.
**б)** Найдите ортогональный базис для $B$.
**в)** Найдите ранг и сигнатуру ограничения $B$ ограничения на пространство решений системы

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 - 7x_5 = 0; \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 0; \end{cases}$$

**Задача 2. а)** Найдите ранг и сигнатуру билинейной формы на $M_n(\mathbb{R})$:

$$B : (X, Y) \mapsto \operatorname{tr}(XY).$$

**б)** Найдите ортогональный базис.

**Задача 3°.** Существует ли на $\mathbb{R}^7$ квадратичная форма с главными угловыми минорами
**а)** $\Delta_1 > 0, \Delta_2 = 0, \Delta_3 > 0, \Delta_4 < 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 < 0, \Delta_7 > 0$;
**б)** $\Delta_1 > 0, \Delta_2 = 0, \Delta_3 > 0, \Delta_4 < 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 < 0, \Delta_7 < 0$;
**в)** $\Delta_1 < 0, \Delta_2 = 0, \Delta_3 > 0, \Delta_4 < 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 < 0, \Delta_7 > 0$?
Если да, то какая у неё может быть сигнатура?

**Задача 4.** Рассмотрим векторное пространство $\mathfrak{sl}_2$ матриц 2 со следом 0. Каждому элементу $x \in \mathfrak{sl}_2$ сопоставим линейный оператор $\operatorname{ad} x : y \to [y, x]$. Определим симметрическую билинейную форму на $\mathfrak{sl}_2$ следующим образом $B(x, y) = \operatorname{tr}(\operatorname{ad} x \circ \operatorname{ad} y)$.

**а)** Запишите матрицу этой формы в базисе $e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Найдите ортогональный базис для этой формы.
**б)** Докажите, что $B(x, y) = c \cdot \operatorname{tr}(xy)$, где $c \in \Bbbk$ и найдите $c$.

**Задача 5. а)** Пусть $V = Mat_2(\Bbbk)$. Докажите, что $B : A \mapsto \det(A)$ – квадратичная форма на $V$ и найдите соответствующую симметрическую билинейную форму. **б)** Найдите сигнатуру этой формы для $\Bbbk = \mathbb{R}$.

**Задача 6.** Классифицируйте все анизотропные симметрические билинейные формы над конечным полем $\mathbb{F}_q$.