Модули над кольцами главных идеалов. Конечнопорождённые абелевы группы.

Задача 1°. Напишите каноническое разложение для следующих абелевых групп:

а) все абелевы группы порядка 36; **б)** $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\left(\mathbb{Z}/(n\mathbb{Z}), \mathbb{Z}/(m\mathbb{Z})\right)$ для произвольных m и n.

Задача 2°. С помощью теоремы о конечно порождённых абелевых группах докажите, что конечная подгруппа мультипликативной группы поля – циклическая.

Задача 3°. Напишите каноническое разложение для фактора решётки $\mathbb{Z}^3$ по подрешётке, порождённой векторами: **а)** $(4,5,3)$, $(5,6,5)$, $(8,7,9)$; **б)** $(-81,-6,-33)$, $(60,6,24)$, $(-3,6,-3)$, $(18,6,6)$;

в) $(-62,-8,-26)$, $(40,10,16)$, $(22,-8,10)$, $(20,2,8)$.

Задача 4. В абелевой группе, порождённой элементами a_1, a_2, a_3, найдите порядок элемента

а) $a_1 + 2a_3$, если $a_1 + a_2 + 4a_3 = 2a_2 - a_2 + 2a_3 = 0$;

б) $32a_1 + 31a_3$, если $2a_1 + a_2 - 50a_3 = 4a_1 + 5a_2 + 60a_3 = 0$.

Задача 5. У абелевой группы $\mathbb{Z}/(3\mathbb{Z}) \oplus \mathbb{Z}/(5\mathbb{Z}) \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}/(31\mathbb{Z})$ найдите **а)** минимально возможное число образующих абелевой группы; **б)** максимальную циклическую подгруппу.

Задача 6. а) Приведите пример бесконечнопорождённого неразложимого $\mathbb{Z}$-модуля, **б)** не содержащего свободных подмодулей.

Задача 7. Пусть порядок конечно порождённой абелевой группы N делится на m. Докажите, что в N есть подгруппа порядка m. Верно ли, что в N есть элемент порядка m?

Задача 8. Пусть A, B и C — такие конечно порождённые модули над кольцом главных идеалов, что $A \oplus C \cong B \oplus C$. Верно ли, что $A \cong B$?

Задача 9. а) Докажите, что площадь параллелограмма с целочисленными вершинами равен $1 + n_0 + \frac{n_1}{2}$, где n_0 — количество вершин строго внутри параллелограмма, а n_1 — количество вершин строго внутри его рёбер.

б*) Докажите, что объём k-мерного параллелепипеда с целочисленными вершинами равен

$$1 + n_0 + \frac{n_1}{2} + \ldots + \frac{n_{k-1}}{2^{k-1}},$$

где n_0 — количество вершин строго внутри самого параллелепипеда, n_i — количество вершин строго внутри $(k-i)$-мерных граней параллелепипеда.