Нормальные формы линейных операторов. Функции от линейных операторов.

Задача 1. а°) Докажите, что произвольное семейство коммутирующих операторов над алгебраически замкнутым полем имеет общий собственный вектор.

б°) Докажите, что произвольное семейство коммутирующих диагонализуемых операторов может быть одновременно диагонализованно в некотором базисе.

в°) Докажите, что ограничение диагонализируемого оператора на подпространство диагонализиуемо.

г°) Пусть поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто характеристики 0. Докажите, что если $A^k = E$, то матрица A – диагонализуема. Приведите контрпример для случая алгебраически замкнутого поля характеристики p/не алгебраически замкнутого поля характеристики 0.

д) Пусть $A \in M_n(\mathbb{C})$ – матрица с числами $a_1, \ldots, a_n$ на побочной диагонали и нулями в остальных местах. Укажите необходимые и достаточные условия того, что матрица A – диагонализируема.

е) Докажите, что множество диагонализируемых матриц плотно в $M_n(\mathbb{C})$.

ж) Верно ли аналогичное утверждение для $M_n(\mathbb{R})$? А для полупростых матриц (см. 2г)?

Задача 2. (Разложение Жордана) Пусть $\Bbbk$ – алгебраически замкнутое поле.
а°) Докажите, что для любой матрицы $A \in M_n(\Bbbk)$ существуют единственные A_s – диагонализируемая и A_n – нильпотентная такие, что $A = A_s + A_n$. Более того, существуют $p, q \in \Bbbk[t]$ без свободного члена такие, что $p(A) = A_s, q(A) = A_n$.

б) Докажите, что для любого элемента $A \in GL_n(\Bbbk)$ существуют единственные A_s – диагонализируемая и A_n – унипотентная (т.е. $E - A_n$ – нильпотентна) такие, что $A = A_s A_n$.

в) Докажите, что для коммутирующих линейных операторов $AB = BA$ верно, что

$$(A + B)_s = A_s + B_s, (A + B)_n = A_n + B_n.$$

Верно ли аналогичное утверждение для мультипликативного разложения?

г) Будем называть матрицу из $M_n(\mathbb{R})$ полупростой, если она диагонализуема над $\mathbb{C}$. Докажите существование и единственность разложения Жордана для матриц из $M_n(\mathbb{R})$ и $GL_n(\mathbb{R})$.

Задача 3. Докажите, что если матрица B коммутирует с любой матрицей, коммутирующей с A, то B является многочленом от A.

Задача 4°. Пусть $A \in M_n(\Bbbk)$. Рассмотрим матрицу $xE - A \in M_n(\Bbbk[x])$.
а) Докажите, что инвариантные множители матрицы $xE - A$ это в точности многочлены блоков Фробениусовой нормальной формы (ФНФ) матрицы A.

б) Рассмотрим матрицу $xE - A$ и приведём её элементарными преобразованиями к диагональному виду с инвариантными факторами $f_1(x), \ldots, f_m(x)$ степеней $d_1, \ldots, d_k$. Каждому преобразованию *строк* матрицы $xE - A$ сопоставим преобразование столбцов матрицы E следующим образом:

- Замена i-ой и j-ой строк соответствует замене i-ого и j-ого столбцов.
- Прибавление к i-ой строке j-ой умноженной на $p(x)$ соответствует вычитанию $p(A)$ умноженной на i-ый столбец из j-ого столбца.
- Домножение i-ой строки на $u \in \Bbbk^\times$ соответствует домножению i-ого столбца на u^{-1}.

В результате получится матрица, у которой первые $n-m$ столбцов – нулевые, а оставшиеся $v_1, \ldots, v_m$ – ненулевые. Пусть P матрица, столбцы которой

$$v_1, Av_1, \ldots, A^{d_1-1}v_1, v_2, Av_2, \ldots, A^{d_2-1}v_2, \ldots, v_m, Av_m, \ldots, A^{d_m-1}v_m$$

Тогда $P^{-1}AP$ – это ФНФ матрицы A.

в) Найдите ФНФ матрицы и матрицу перехода для матрицы из $M_n(\mathbb{Q})$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 4 \\ 2 & -1 & 4 & -8 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Задача 5°. а) Объясните следующий алгоритм получения Жордановой нормальной формы (ЖНФ).

- Найти инвариантные факторы матрицы A.
- Разложить i-ый инвариантный фактор $f_i(x) = (x-\lambda_1)^{\alpha_1} \dots (x-\lambda_s)^{\alpha_s}, \sum \alpha_i = d_i$ на множители.
- Пусть $v_1, \dots, v_m$ – ненулевые столбцы матрицы из алгоритма для нахождения ФНФ. Пусть матрица P это матрица со столбцами

$$\begin{gathered}(A-\lambda_1 E)^{\alpha_1-1}(A-\lambda_2 E)^{\alpha_2}\dots(A-\lambda_s E)^{\alpha_s}v_1\\ (A-\lambda_1 E)^{\alpha_1-2}(A-\lambda_2 E)^{\alpha_2}\dots(A-\lambda_s E)^{\alpha_s}v_1\\ \dots\\ (A-\lambda_1 E)^{0}(A-\lambda_2 E)^{\alpha_2}\dots(A-\lambda_s E)^{\alpha_s}v_1\\ (A-\lambda_1 E)^{\alpha_1}(A-\lambda_2 E)^{\alpha_2-1}\dots(A-\lambda_s E)^{\alpha_s}v_1\\ \dots\end{gathered}$$

Тогда $P^{-1}AP$ – это ЖНФ матрицы A.

б) Найдите ЖНФ матрицы из $M_n(\mathbb{C})$ и матрицу перехода $A = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 5 \\ -4 & 0 & -3 \\ -6 & -4 & -2 \end{pmatrix}$.

в) Найдите ЖНФ $J_n(\lambda)^k$, где $J_n(\lambda)$ – жорданова клетка размера $n \times n$ с λ на диагонали.

Задача 6. а) Докажите, что характеристический и минимальный многочлены подобных матриц равны.
б) Докажите, что матрицы 2×2 и 3×3 подобны тогда и только тогда когда их характеристический и минимальный многочлены совпадают.
в) Верно ли утверждение предыдущего пункта для матриц $n \times n, n \geq 4$?

Задача 7. Объясните, как зная ФНФ получить ЖНФ матрицы $A \in M_n(\mathbb{C})$ и наоборот.

Задача 8. Классифицируйте с точностью до подобия все 2×2 матрицы с коэффициентами в поле **а)** $\mathbb{F}_2$; **б)** $\mathbb{F}_3$.
Задача 9. а) Вычислите $f(J_n(\lambda))$, где f – произвольная аналитическая функция;
б) $A^n, \sin A, \cos A, e^A$ для матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$;
в) То же самое для матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.
Задача 10. а) Докажите, что $\frac{d}{dt}\exp(At) = A\exp(At)$ для любого $t \in \mathbb{R}$ (и объясните, что означает производная матрицы).
б) Пусть $y_1, \dots, y_4$ – дифференцируемые в окрестности нуля функции. Решите систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_1 + 2y_2 - 4y_3 + 4y_4 \\ \dot{y}_2 = 2y_1 - y_2 + 4y_3 - 8y_4 \\ \dot{y}_3 = y_1 + y_3 - 2y_4 \\ \dot{y}_4 = y_2 - 2y_3 + 3y_4 \end{cases}$$

$(y_1(0), y_2(0), y_3(0), y_4(0)) = (0, 0, 0, 0)$
в) Решите дифференциальное уравнение

$$y^{(4)} + 4y^{(3)} + 6y^{(2)} + 4y' + y = 0,$$

если $y_1(0) = \dots = y^{(3)}(0) = 0$, а y – четырежды дифференцируемая функция в окретсности нуля.
Задача 11. Докажите, что собственные значения матрицы $f(A)$ это в точности $f(\lambda_i), i = 1, \dots, k$, где λ_i – собственные значения матрицы A.