Ассоциативные алгебры - 1.

Задача 1. Опишите с точностью до изоморфизма алгебры размерности 2 над полем $\Bbbk$ если **а)** $\Bbbk$ алгебраически замкнуто; **б)** произвольно.

Задача 2. Приведите пример алгебры A и подмножества $I \subset A$, так что I идеал A как кольца, но не идеал A как алгебры.

Задача 3. а) Докажите, что алгебра матриц $M_n(\Bbbk)$ над полем $\Bbbk$ – простая.
б) Докажите, что алгебра Вейля $\Bbbk[x,y]/(xy-yx-1)$ – простая бесконечномерная алгебра, если $\operatorname{char}\Bbbk = 0$.

Задача 4. а) Посчитайте явно (левое) регулярное представление алгебр $\mathbb{C}, \mathbb{H}$ над $\mathbb{R}$ в базисе $1, i$ и $1, i, j, k$ соответственно. **б)** Докажите, что комплексификация алгебры кватернионов, т.е. $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ изоморфна $M_2(\mathbb{C})$.

Задача 5. Модуль над алгеброй A называется *циклическим*, если существует $m \in M$ такой, что $M = A \cdot m$. Докажите, что любой циклический модуль над A изоморфен A/I, где I – левый идеал в A. Приведите пример, который показывает, что, вообще говоря, идеал I зависит от выбора циклического вектора $m \in M$.