Ассоциативные алгебры -2.

Задача 1. Докажите, что алгебра **а)** $M_n(D)$, где D – алгебра с делением, проста. **б)** Любой простой модуль изоморфен D^n, а регулярный $\underbrace{D^n \oplus \ldots \oplus D^n}_{n}$. **в)** Любой модуль раскладывается в сумму неприводимых.

Задача 2. Опишите все неразложимые и неприводимые представления алгебры **а)** $\mathbb{C}[x]$ **б)** $\mathbb{R}[x]$.

Задача 3. Докажите, что **а)** $RadA = \bigcap_{I \subset A} I$, где I – это максимальный левый идеал. **б)** $RadA = \bigcap_{I \subset A} I$, где I – это максимальный правый идеал. **в)** Для конечномерной алгебры $RadA$ состоит из нильпотентных элементов.

Задача 4. Докажите, что неприводимое представление коммутативной алгебры над алгебраически замкнутым полем одномерно.

Задача 5. а) Пусть V – неприводимое счётномерное представление алгебры A над полем $\mathbb{C}$. Тогда $\mathrm{End}_A(V) = \mathbb{C}$. **б)** Рассмотрим $A = V = \mathbb{C}(x)$. Постройте нескалярный сплетающий оператор.

Задача 6. Пусть

$$A = \Bbbk\langle x, y\rangle/(xy - yx - 1)$$

– алгебра Вейля.
а) Докажите, что элементы $x^i y^j$ образуют базис в A.
б) Пусть $\mathrm{char}\,\Bbbk = 0$. Классифицируйте все неприводимые конечномерные представления A. Найдите все двусторонние идеалы в A.
в) Опишите центр A в зависимости от характеристики поля.
г) Пусть $\mathrm{char}\,\Bbbk = p$. Классифицируйте все неприводимые конечномерные представления A.

Задача 7*. Алгебра A_q над $\mathbb{C}$ порождена x, y, x^{-1}, y^{-1} с соотношениями

$$xy = qyx, xx^{-1} = x^{-1}x = yy^{-1} = y^{-1}y = 1$$

– q-алгебра Вейля.
а) Докажите, что элементы $x^i y^j$ образуют базис в A.
б) Опишите центр A_q в зависимости от q. Найдите все двусторонние идеалы в случае, когда q – не корень из единицы.
в) Для каких q у алгебры A_q существуют неприводимые конечномерные представления?
г) Для всех q из предыдущего пункта опишите неприводимые конечномерные представления.