Алгебры с делением.

Задача 1. [Теорема о двойном централизаторе] Пусть $\Bbbk = \mathbb{C}$, E – векторное пространство над $\mathbb{C}$. Пусть A – полупростая подалгебра в $End(E)$ и $B = End_A(E)$. Докажите, что
а) $A = \mathrm{End}_B(E)$ и B – полупроста.
б) Как представление $A \otimes B$(а как определяется действие?) имеем

$$V = \bigoplus V_i \otimes W_i,$$

где V_i – все неприводимые представления A, а W_i – все неприводимые представления B.

Задача 2. Докажите, что $[M_n(\Bbbk), M_n(\Bbbk)] = \mathfrak{sl}_n(\Bbbk) = \{A \in M_n(\Bbbk) \mid \operatorname{tr} A = 0\}$. Верно ли это равенство, если заменить $\Bbbk$ на произвольную алгебру с делением?

Задача 3. Пусть $\Bbbk = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, K = \Bbbk(t)$, $A = K[x]/(x^4 - t^2)$. Найдите радикал $\operatorname{Rad} A$ и $A/\operatorname{Rad} A$. Докажите, что A не содержит подалгебры, изоморфной $A/\operatorname{Rad} A$.

Задача 4. а) Докажите, что если A – центральная простая алгебра, а B – произвольная конечномерная, то (двусторонние) идеалы $A \otimes B$ имеют вид $A \otimes I$, где I – идеал B.
б) Докажите, что $Z(A \otimes B) = Z(A) \otimes Z(B)$ для произвольных алгебр.

Задача 5. Верно ли, что тензорное произведение конечномерных простых алгебр – простая алгебра?

Задача 6. Пусть D_1 и D_2 – центральные алгебры с делением. Пусть $|D_1 : \Bbbk| = m, |D_2 : \Bbbk| = n$. Пусть n и m взаимнопросты. Докажите, что $D_1 \otimes D_2$ – (центральная) алгебра с делением.

Задача 7. Обозначим через $Br(K)$ группу Брауэра поля K, а если $L \supset K$, то относительную группу Брауэра через $Br(K/L) := (\ker Br(K) \to Br(L))$. Докажите, что
а) $Br(\Bbbk(t)/\Bbbk) = 0$;
б*) Пусть $\Bbbk = \bar{\Bbbk}$. Тогда $Br(\Bbbk(t)) = 0$;