Полупростые алгебры, неприводимые и неразложимые представления

Задача 1. Докажите, что модуль вполне приводим тогда и только тогда когда любой простой подмуодуль имеет дополнение.

Задача 2. Опишите конечномерные алгебры без нильпотентных элементов.

Задача 3. Пусть V – конечномерное векторное пространство над $\mathbb{C}$ и $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – симметрическая билинейная форма. Определим алгебру Клиффорда

$$Cl(V) = TV/(v \otimes v - (v,v)\cdot 1)$$

а) Докажите, что если $V = \langle e_1, \ldots, e_n\rangle$ базис V, то $e_I = e_{i_1} \cdot \ldots \cdot e_{i_k}$, где $I = \{i_1 < \ldots < i_k\}$ и 1 образуют базис в $Cl(V)$.
б) Докажите, что $Cl(V)$ полупроста тогда и только тогда когда форма $\langle\cdot,\cdot\rangle$ невырождена.
в) Докажите, что если форма $\langle\cdot,\cdot\rangle$ невырождена и $\dim V = 2k$, то $Cl(V) \simeq M_N(\mathbb{C})$. Найдите N.
г) Докажите, что если форма $\langle\cdot,\cdot\rangle$ невырождена и $\dim V = 2k+1$, то $Cl(V) \simeq M_N(\mathbb{C}) \oplus M_N(\mathbb{C})$. Найдите N.

Задача 4. а) Пусть A – конечномерная алгебра над полем характеристики 0. Пусть L – левое регулярное представление. Докажите, что A полупроста тогда только тогда когда форма $(x,y) \mapsto \operatorname{tr} L(x) \circ L(y)$ невырождена.
б) Пусть G – конечная группа, $\operatorname{char}\Bbbk = 0$. Докажите, что групповая алгебра $\Bbbk[G]$ полупроста.
в) Докажите, что элементы $b_C = \sum_{g\in C} g$, где C – класс сопряженности в G образуют базис центра групповой алгебры.
г) Пусть $\operatorname{char}\Bbbk = 0$ и $\Bbbk = \overline{\Bbbk}$. Докажите, что число неприводимых представлений групповой алгебры равно количеству классов сопряженности в группе.

Задача 5. Докажите, что конечномерное представление V ассоциативной алгебры неразложимо, тогда и только тогда, когда $\operatorname{End}_A(V)$ – локальное кольцо.

Задача 6. Докажите, что произвольная конечномерная алгебра имеет конечное число неприводимых представлений. Верно ли это для неразложимых представлений?

Задача 7*. а) Пусть $R = \{f \in C_{[0,1]} \mid f(0) = f(1)\}$, и пусть $M = \{f \in C_{[0,1]} \mid f(0) = -f(1)\}$. Покажите, что M и R – неразложимые R-модули.

б) Покажите, что M и R – неизоморфны.

в) Покажите, что $M \oplus M \cong R \oplus R$.