Когомологии ассоциативных алгебр. Теорема Веддербёрна.

Пусть A – ассоциативная алгебра над полем $\Bbbk$, M – (A,A)-бимодуль (модуль над $A\otimes A^{op}$). Определим $C^n = \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(A^{\otimes n}, M), n \geq 0$ и $d^n : C^n \to C^{n+1}$

$$d^n f(a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}) = a_1 \cdot f(a_2, \ldots, a_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i f(a_1, \ldots, a_i a_{i+1}, \ldots, a_{n+1}) + (-1)^{n+1} f(a_1, \ldots, a_n) \cdot a_{n+1}$$

Задача 1. Докажите, что $d^n \circ d^{n+1} = 0$ для любого $n \geq 0$.
Определим (абелевы) группы *когомологий Хохшильда*

$$HH^n(A, M) = \ker d^n / \operatorname{im} d^{n-1}$$

Элементы $\ker d^n := Z^n(A, M)$ называются коциклами, а $\operatorname{im} d^{n-1} = B^n(A, M)$ – кограницами.

Задача 2. Опишите группы $HH^0(A, M)$ и $HH^0(A, A)$, $HH^1(A, A)$.

Определение. *Расширение A с помощью M это точная последовательность алгебр*

$$0 \to M \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} A \to 0.$$

Отметим, что M является идеалом в E.

Определение. *Два расширения эквивалентны, если существует такое $\phi : E_1 \to E_2$ такое, что следующая диаграмма коммутативна:*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & E_1 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle id_M} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} & & \downarrow{\scriptstyle id_A} & & \\ 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & E_2 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Задача 3. Докажите, что следующие два свойства эквивалентны:

- Существует $s : A \to E$ такое, что $\pi \circ s = \mathrm{id}$.
- $E \simeq A \oplus M$, причём A – подалгебра в E.

Определение. *Расширение, удовлетворяющее одному из свойств задачи 3 называется расщепимым.*

Задача 4. Пусть E – расширение A с помощью M, причём $M^2 = 0$.
а) Докажите, что $a_1 \cdot m \cdot a_2 := e_1 m e_2$, где e_1, e_2 – произвольные прообразы a_1 и a_2 в E определяет структуру (A,A)-бимодуля на M.
б) Докажите, что существует $f : A \otimes A \to M$ такое, что $(a, m) \cdot (b, n) = (ab, a \cdot n + m \cdot b + f(a, b))$.
в) Докажите, что $f \in Z^2(A, M)$. Обратно, если $f \in Z^2(A, M)$, то формула пункта а) определяет расширение, которое мы будем обозначать через E_f.
г) Докажите, что два расширения E_{f_1} и E_{f_2} эквиваленты тогда и только тогда когда $f_1 - f_2 \in B^2(A, M)$.
д) Докажите, что классы эквивалентности расширений A с помощью M биективно соответствуют $H^2(A, M)$.
е) Пусть $f \in B^2(A, M)$. Докажите, что расширение расщепимо.

Задача 5. Пусть $H^2(A/\operatorname{Rad} A, M) = 0$ для любого $A/\operatorname{Rad} A$ бимодуля M. Докажите, что расширение

$$0 \to \operatorname{Rad} A \to A \to A/RadA \to 0$$

расщепимо.

Определение. *Полупростая алгебра A над полем $\Bbbk$ называется сепарабельной, если $A \otimes K$ – полупроста для любого расширения $K \supset \Bbbk$.*

Задача 6. Докажите, что следующие условия эквивалентны:

- A - сепарабельна;
- Форма $B(a, b) = \mathrm{tr}(ab)$ – невырождена.

Задача 7. Пусть поле $\operatorname{char}\Bbbk = 0$ или $\operatorname{char}\Bbbk = p$ и $\Bbbk^p = \Bbbk$. Докажите, что любая полупростая алгебра над таким полем сепарабельна.

Задача 8. (Элемент Казимира) Пусть A – сепарабельная алгебра, $\{e_i\}$ – базис A, $\{e^i\}$ – двойственный базис, т.е. $B(e_i, e_j) = \delta_{ij}$. Докажите, что

- $\sum_i e_i e^i = 1$
- $\sum ae_i \otimes e^i = \sum e_i \otimes ae^i$ для любого $a \in A$.

Задача 9. Пусть $f \in Z^2(A, M)$. Определим $g : A \to M$ по формуле

$$g(a) = \sum_i f(a, e_i)e^i$$

Докажите, что $dg = f$, откуда $H^2(A, M) = 0$.

Задача 10*. Докажите, что для сепарабельной алгебры $H^1(A, M) = 0$.

Задача 11*. Выведите из этого теоерму Мальцева: любые два полупростых дополнения сопряжены элементом $(1 + n), n \in \operatorname{Rad} A$.