Соответствие Галуа.

Задача 1. Найдите группу Галуа многочлена над $\mathbb{Q}$: **а)** $f(x) = x^3 + 5x + 5$; **б)** $x^4 - 2$.

Задача 2. Докажите, что $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{5}) \supset \mathbb{Q}$ не является расширением Галуа для любого $n \geq 3$.

Задача 3. Пусть G – конечная группа, которая действует на поле K автоморфизмами. Докажите, что $K \supset K^G$ – (конечное) расширение Галуа. Здесь $K^G = \{x \in K \mid g \cdot x = x \ \forall \ x \in G\}$.

Задача 4. Докажите, что разрешимое расширение разрешимо в радикалах.

Задача 5. Пусть $n_1, ..., n_k$ такой набор целых чисел, что никакое из непустых подмножеств не дает в произведении полный квадрат.
а) Докажите, что степень расширения $\mathbb{Q}(\sqrt{n_1}, ..., \sqrt{n_k})$ равна 2^k, найдите его группу Галуа, опишите все подрасширения.
б) Докажите, что $\mathbb{Q}(\sqrt{n_1}, ..., \sqrt{n_k}) = \mathbb{Q}(\sqrt{n_1} + \ldots + \sqrt{n_k})$.

Задача 6.
а) Докажите, что $\mathbb{Q}(\sqrt{2 + \sqrt{2}}) \supset \mathbb{Q}$ – расширение Галуа и найдите его группу Галуа.
б) Найдите группу Галуа многочлена $x^5 - 2$ (то есть группу Галуа его поля разложения).
в) Докажите, что группа Галуа многолчлена $x^5 - x - \dfrac{1}{9}$ изоморфна S_5.

Задача 7. Пусть $f \in \mathbb{Q}[x]$ – неприводимый многочлен простой степени p.
а) Если $Gal(f)$ содержит транспозицию, то $Gal(f) \simeq S_p$.
б) Если у f ровно два корня из $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, то $Gal(f) \simeq S_p$.
в) $Gal(x^5 - 5x + 2) \simeq S_5$.
г) Пусть $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ и $m \geq 5$ – нечётно. Рассмотрим набор $k_1, \ldots, k_{m-2}$ различных чётных чисел и определим $p(x) = (x^2 + n)(x - k_1) \ldots (x - k_{m-2}) - 2$. Докажите, что для достаточно большого n у $p(x)$ ровно два корня из $\mathbb{C}/\mathbb{R}$.
д) Докажите, что существует неприводимый $f \in \mathbb{Q}[x]$ простой степени p с группой Галуа изоморфной S_p.

Задача 8*. Пусть L поле разложения неприводимого над K ($\operatorname{char} K \neq 2, 3$) многочлена 3 степени с дискриминантом D. Найдите группу Галуа расширения **а)** $L/K(\sqrt{D})$; б) L/K.

Задача 9*. а) Объясните, как решать кубическое уравнение в радикалах (можно не выписывать до конца явную формулу). **б)** Тот же вопрос для уравнения четвертой степени.