Нормальные и сепарабельные расширения.

Задача 1. Докажите, что если $\Bbbk \subset F \subset L$ – конечные расширения полей, то $|L:\Bbbk| = |L:F||F:\Bbbk|$.

Задача 2. а) Докажите, что расширение $\mathbb{F}_p(x,y)$ над $\mathbb{F}_p(x^p,y^p)$ – несепарабельное конечное расширение. Здесь $\mathbb{F}_p$ – конечное поле из p элементов.
б) Может ли это расширение быть порождено одним элементов, т.е. $\mathbb{F}_p(x,y) = \mathbb{F}_p(x^p,y^p)[a]$ для некоторого $a \in \mathbb{F}_p(x,y)$?

Задача 3. а) Докажите, что в цепочке $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ каждый шаг – нормальное расширение, при этом $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ – ненормально.
б) Приведите пример цепочки полей $\Bbbk \subset F \subset L$ для которой $\Bbbk \subset L$ нормально, а расширения $\Bbbk \subset F$ и $F \subset L$ ненормальны.

Задача 4. Найдите размерность над $\mathbb{Q}$ поля разложения многочлена
а) $x^4 - 2$;
б) $x^p - a$ (p простое, a не полная p-ая степень).

Задача 5. Пусть $K \subset L$ – сепарабельное расширение. Докажите, что существует $L \subset L'$ такое, что L' – нормальное и сепарабельное.

Задача 6*. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & t^2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

над полем $\mathbb{F}_p(t)$. Докажите, что для A не существует разложения Жордана.